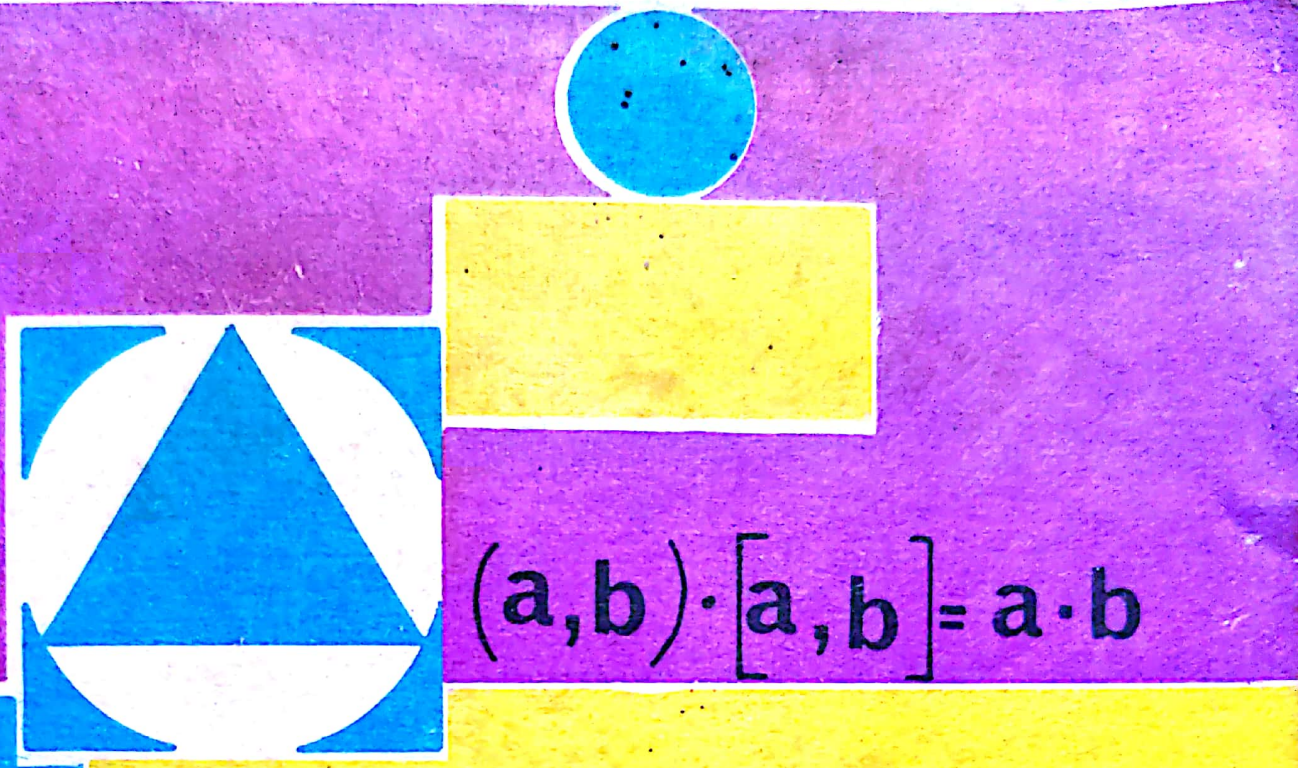
Prof. PETRE ȚELINOIU



CULEGERE
de exerciții și probleme de aritmetică

clasele IV — VIII

EDITURA PORTO-FRANCO

Scanned with OKEN Scanner

PETRE ȚELINOIU

CULEGERE
de exerciții și probleme de aritmetică pentru clasele IV – VIII

EDITURA PORTO FRANCO
GALAȚI

Scanned with OKEN Scanner

ISBN : 973—557—026—2

Lector : Constantin Vremuleț
Tehnoredactor : Gheorghe Hîncu

Apărut 1991. Bun de tipar 28.02.1991
Coli tipar 18,5

Tiparul executat sub comanda nr. 92 la
Întreprinderea Poligrafică Galați
B-dul George Coșbuc nr. 223 A
ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

MOTTO :

„Matematica este regina științelor, iar aritmetica este regina matematicii."

G. F. Gauss

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Activitatea de rezolvare a exercițiilor și problemelor de matematică constituie, fără îndoială, o importantă cale de însușire și aprofundare a cunoștințelor diverselor domenii ale matematicii. Ea stă în sprijinul îndeplinirii rolului formativ al matematicii și constituie, într-o anumită măsură, un veritabil act de creație.

Deprinderea acestei activități trebuie începută, după părerea noastră, de la cea mai fragedă vîrstă.

Problemele de aritmetică, prin specificul lor, dezvoltă în mare măsură gîndirea logică a elevilor. Există, evident, probleme de aritmetică ce pot fi rezolvate algoritmic, dar și de acelea care necesită din partea rezolvitorilor creativitate și gîndire proprie.

Gradul sporit de dificultate al problemelor propuse spre rezolvare în Gazeta Matematică și prezentate în mod negradat nu trezesc interesul majorității elevilor din clasele mai mici. Selectarea acestui gen de probleme și prezentarea lor în mod gradat în funcție de dificultate și de nivelul de cunoștințe constituie un act pedagogic de mare importanță.

Autorul acestei culegeri de exerciții și probleme realizează cu succes acest fapt, strîngînd, în cadrul unui sistem bine închegat, o serie de exerciții și probleme de aritmetică propuse spre rezolvare în Gazeta Matematică din ultimii ani. Ea înglobează 1056 de probleme distribuite în 9 capitole referitoare la : operații aritmetice cu numere naturale ; divizibilitatea numerelor naturale ; fracții, fracții zecimale, radicali, inegalități numerice, operații în baze diferite ; metode diferite de rezolvare a problemelor.

Capitolul al IX-lea se adresează în mod special elevilor din ciclul primar.

În cadrul fiecărui paragraf sînt prezentate probleme mai dificile pentru care autorul dă soluții, probleme propuse care se rezolvă asemănător, însoțite de răspunsuri, precum și unele fără răspunsuri.

Culegerea se adresează cu precădere elevilor din clasa a IV-a pînă la clasa a VIII-a, dar și învățătorilor și elevilor din liceele pedagogice. Unele exerciții și probleme — privind divizibilitatea cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun, numere prime, descompunerea în factori primi — abordate, sînt utile și elevilor clasei a X-a de liceu la capitolul „Noțiuni de aritmetica numerelor întregi" din cadrul disciplinei de algebră.

Culegerea poate fi folosită de către învățători, atît în cadrul activității cu elevii, cît și în pregătirea susținerii examenelor de definitivare și obținerea gradului II în învățămînt.

Pentru elevii claselor V — VIII, ea constituie în plus o sursă de inspirație în activitatea cercului de matematică.

Apreciez în mod deosebit inițiativa reputatului profesor Petre Telinoiu de a realiza această culegere de exerciții și probleme punînd la baza ei talentul său pedagogic, competența și experiența didactică însușită pe parcursul unui sfert de secol în munca de pregătire a diverselor generații de învățători în cadrul Liceului Pedagogic „G. Negri" din Galați.

Conf. dr. E. Olaru

Capitolul I

A) OPERAȚII ARITMETICE CU NUMERE NATURALE

AFLAREA NUMERELOR NATURALE

1. Să se afle numărul $\overline{abcd}$ știind că $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 1\,986$

I. Safta — G.M. nr. 10/1986

Soluție: Scriind sistematic în baza zece, avem: $(1\,000a + 100b + 10c + d) + (100b + 10c + d) + (10c + d) + d = 1\,986$. Efectuînd calculele, obținem: $1\,000a + 200b + 30c + 4d = 1\,986$. Se observă că $a = 1$ și $d \in \{4,9\}$.

Dacă $d = 4$, rezultă $4 \cdot 4 = 16$ și $30c + 16$ să se termine în 86. Dacă $c = 9$, atunci $30 \cdot 9 + 16 = 286$, deci se termină cu 86. Numărul devine $\overline{1b94}$. În acest caz nu există cifră b astfel ca $1\,000 + 200b + 30 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 1\,986$. Rămîne $d = 9$, deci $30c + 4 \cdot 9$ să se termine cu 86, avem $c = 5$, $b = 4$. R. $\overline{abcd} = 1\,459$.

2. Să se determine a, b, c astfel încît: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{bac} = 900$, unde $a < b < c$.

Adrian Tudorașcu — G.M. nr. 10/1987

Soluție: Scriind sistematic în baza zece și efectuînd calculele, obținem egalitatea: $100(a + 2b) + 10(a + b + c) + (a + 2c) = 900$. Cum a, b, c sînt cifre, rezultă:

$$\begin{aligned} a + 2c &= 10 \\ a + b + c &= 9 \\ a + 2b &= 8 \end{aligned}$$

Se obțin două soluții, și anume:

$a = 6,\ b = 1,\ c = 2$ și $a = 2,\ b = 6,\ c = 4.$

Dar $a < b < c$, atunci rămîne $a = 2,\ b = 6,\ c = 4.$
Faceți verificarea.

3. Să se determine numărul natural n de patru cifre, știind că $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ și cifrele sale sînt distincte.

Vasile Iliaș — G.M. nr. 11/1984

Soluție: Numărul n se mai scrie astfel: $n = 100(a + b + c) + 10(b + c + a) + (c + a + b) = 111(a + b + c)$.
Dacă $a + b + c = 19$, atunci $n = 111 \cdot 19 = 2\,109$.

R: $n = 2\,109 = 982 + 829 + 298$
$= 874 + 748 + 487$
$= 978 + 789 + 397$
$= 865 + 658 + 586$

Mai sînt și alte soluții?

4. Să se determine numărul natural de forma $\overline{abac}$, în baza 10, știind că suma cifrelor acestui număr este egală cu numărul format din ultimele două cifre.

Mihai Viydeliuc — G.M. nr. 5/1987

Soluție: Punînd condiția, se ajunge la $b = 8a$, adică $a = 1$, $b = 8$, $c \in \{0, 2, 6, 4, 5, 6, 7, 9\}$.
R: 1810, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1819

5. Să se determine cifrele distincte a, b, c astfel încît: $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{abc}$.

G.M. nr. 7—8/1987
R: $11 + 88 + 99 = 198$

6. Să se arate că suma tuturor numerelor de trei cifre scrise în baza 10, cu cifrele a, b, c este divizibilă cu $a + b + c$.

Margareta Flontaș — G.M. nr. 1/1984

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $S = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a + b + c)$.

7. Să se găsească numărul $A = \overline{abc}$, scris în baza 10, cu $a \neq b \neq c \neq 0$ care satisface relația $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb}$.

Victoria Poșta — G.M. nr. 7/1982

Soluție: Condiția devine $78a = 12b + 21c$. Pentru $a = 1$, $b = 5$, $c = 2$; avem $A = 152$.
Mai sînt și alte soluții?

8. Să se găsească două numere cunoscînd că suma lor este 161, iar suma răsturnatelor lor este 593.

Ștefan Vișan — G.M. nr. 5/1985

Soluție: Cele două numere sînt de forma $\overline{abc}$ și $\overline{ef}$.
R: $\overline{abc} = 135$ și $\overline{ef} = 26$.

9. Efectuați $\overline{abcd} + \overline{mnpq}$ știind că $\overline{an} + \overline{mb} = 99$ și $\overline{cq} + \overline{pd} = 100$. Numerele sînt scrise în baza zece.

I. Safta — G.M. nr. 2/1983

Soluție: $\overline{abcd} + \overline{mnpq} = 100\,(\overline{an} + \overline{mb}) + (\overline{cq} + \overline{pd}) = 10\,000$.

R: 10 000

10. Să se afle numărul $\overline{abcd}$ scris în baza zece, știind că $\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 218$ și $a + b + c + d = 21$.

I. Safta — G.M. nr. 2/1983

Soluție: $\overline{abc} + \overline{ab} + c = 218$ $\overline{aaa} + \overline{bb} + c = 218$, de unde $a = 1$; $b = 9$, $c = 8$ și din $a + b + c + d = 21$, avem $d = 3$.
R: 1 983

11. Să se reconstituie adunarea, steluțele fiind cifre în baza zece, luate o singură dată:

$$*** + ** + 3 = ****$$

Ionel Atanasiu — G.M. nr. 10/1979

R: 978 + 45 + 8 = 1 026

Mai sînt și alte soluții?

12. Să se determine cifrele a, b, c, d știind că în baza 10 avem egalitatea $\overline{8abcd} + \overline{dcbaa} = 111\,111$.

Grigore Preoteasa — G.M. nr. 7/1984

R: d = 7; a = 4; c = 6; b = 5

Mai sînt și alte soluții?

13. Să se afle numărul $\overline{2abcd8}$ scris în baza 10, cunoscînd că $\overline{2abcd} + \overline{abcd8} = 88\,781$.

Constantin C. Dinu — G.M. nr. 1/1980

R: 257 983

14. Să se afle un număr de patru cifre știind că este mai mic cu 7 812 decît răsturnatul său și cifra sutelor este egală cu cea a unităților.

Emilian Zbîrcea — G.M. nr. 1/1983

Soluție: $N = \overline{abcd}$. Condiția problemei se scrie astfel: $\overline{abcd} + 7\,812 = \overline{bcba}$. Pentru ca $\overline{bcba}$ să fie format din patru cifre trebuie ca $a \in \{1,2\}$. Dacă $a = 1$, atunci $b = 9$, $c = 7$, deci $\overline{abcd} = 1\,979$.

Mai sînt și alte soluții?

15. Să se reconstituie adunarea:

$$\overline{abcd} + \overline{dcb4} = \overline{ccc0}$$

știind că a, b, c, d sînt cifre distincte.

Ion Burcă — G.M. nr. 4/1986

Soluție: Se observă că d = 6, deci suma zecilor va fi 1 + c + b = $\overline{1c}$, apoi 1 + c + b = 10 + c, deci b = 9. Deci, $\overline{a9c6} + \overline{6c94} = \overline{ccc0}$. Dacă c = 8, avem a = 1.

R: 1 986 + 6 894 = 8 880

16. Să se afle cel mai mare număr de patru cifre, scris în baza 10, care adunat cu răsturnatul său să aibă suma 10 670.

Gargina Ani — G.M. nr. 8/1986

R: 9 601

17. În fiecare din adunările

*** + *** + *** = **** și
*** + *** + *** = ****

steluțele reprezintă elementele distincte ale mulțimii {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

Fie N_1 și N_2 rezultatele acestor adunări. Să se arate că $N_1 - N_2 \leq 1\,782$.

Concursul de matematică, etapa județeană Călărași — G.M. nr. 11—12/1986

Soluție: Cel mai mare număr $N_1 = 963 + 852 + 741$, iar cel mai mic număr $N_2 = 147 + 258 + 369$. Deci, $N_1 = 2\,556$; $N_2 = 774$; $N_1 - N_2 = 1\,782$.

18. Reconstituiți adunarea: BDCE + BDAE = AECBE.

* * * — G.M. nr. 6/1987

R: 5 240 + 5 210 = 10 450

19. Înlocuiți literele cu cifre astfel încît suma de mai jos să fie verificată:

BALADA + LADA + ADA + DA + A = 253 525.

Dragoș Constantinescu — G.M. nr. 4/1987

R: A = 5; D = 0; L = 1; B = 2

20. Să se reconstituie adunarea:

BARARE + ARARE + RARE + ARE + RE + F = = 5*0*42.

* * * — G.M. nr. 12/1980

R: B = 4; A = 5; R = 6; E = 7

21. Să se reconstituie adunarea:

FAURARI + AURARI + URARI + RARI + ARI + RI + I = 438 483.

Aurel Doboșan — G.M. nr. 3/1985

R : F = 8 ; A = 6 ; U = 5 ; R = 7 ; I = 9

22. Reconstituiți adunarea în baza zece :

ABACDEF + BACDEF + ACDEF + CDEF + DEF + EF + F = 5 558 321.

Matematica v škole nr. 3/1977 din G.M. nr. 10/1984

R : A = 4 ; B = 7 ; C = 8 ; D = 2 ; E = 5 ; F = 1

23. Să se afle cifrele x, y, z din egalitatea

$\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx} = \overline{xxx} + \overline{yyy} + \overline{zzz} + 666$, numerele fiind scrise în sistemul zecimal de numerație.

Maricica Ștefan — G.M. nr. 12/1978

R : x = 1 ; y = 2 ; z = 3

24. Să se determine un număr natural cu trei cifre știind că cifra sutelor reprezintă suma dintre cifra zecilor și cea a unităților, iar suma dintre număr și răsturnatul său este 888.

Lucian Ungureanu — G.M. nr. 3/1985

R : abc = 642

25. Să se afle numărul $\overline{5abc43}$ scris în baza zece dacă :

$\overline{abc24} + \overline{24abc} + \overline{2abc4} + \overline{4abc2} = 98\,913$.

Mircea Costeniuc — G.M. nr. 1/1984

R : 512 343

26. Să se determine cifrele a, b, c, d, e astfel încît să avem :

$\overline{bdce} + \overline{bdae} = \overline{aecbe}$.

Numerele sînt scrise în baza zece.

Bîră Ludovic — G.M. nr. 6/1981

R : a = 1 ; b = 5 ; c = 4 ; d = 2 ; e = 0

Scanned with OKEN Scanner

27. Se pot pune 77 bile în 12 cutii astfel încît în fiecare să fie cel puțin o bilă și să nu existe două cutii cu același număr de bile?

I.C. Ligor — G.M. nr. 8/1984

Soluție: Ca să nu existe două cutii cu același număr de bile ar trebui să avem cîte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 bile în cele 12 cutii, adică $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = \frac{(1 + 12) \cdot 12}{2} =$ = 78 bile. Cum numărul total de bile este 77, înseamnă că nu putem pune cele 77 bile în cele 12 cutii în condițiile problemei.

28. Să se arate că suma numerelor naturale de la 1 la 1 000 care au cifra a (cu $1 \leq a \leq 9$) exact de două ori se divide cu 11.

Radu Ghenghiu — G.M. nr. 12/1982

Soluție: $S = (11 + 22 + 33 + \ldots + 99) + (101 + 202 + \ldots + 909) + (110 + 220 + \ldots + 990) = \frac{(11 + 99) \cdot 9}{2} +$

$+ \frac{(101 + 909) \cdot 9}{2} + \frac{(110 + 990) \cdot 9}{2} = 1\,110 \cdot 9 = M\,111.$

29. a) Să se însumeze toate numerele întregi de la 1 la 1 000 care au cifre 3 de două ori.

b) Să se însumeze toate numerele întregi de la 1 la 100 care au cifra 1 de două ori.

Valeriu Barandă — G.M. nr. 3/1980

Soluție: a) Numerele se pot grupa astfel: $(33 + 133 + 233 + 433 + \ldots + 933) + (303 + 313 + 323 + 343 + \ldots + 393) + (330 + 331 + 332 + 334 + \ldots + 339) = 10\,656.$

b) Analog cu a).

30. Considerăm șirul de numere naturale 3; 9; 18; 30; 45; ... la care se observă că: $3 = 1 + 2$; $9 = 2 + 3 + 4$; $18 = 3 + 4 + 5 + 6$; $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$; $45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ etc.

a) Numărul 1 981 face parte din șir?

b) Ce termen din șir se găsește pe locul 100?

Nicolae Păuna — G.M. nr. 11/1982

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: a) Dacă primul număr din suma ce dă numărul 1 981 este n, atunci avem: $n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + n) = 1\,981$ sau $\frac{(n + n + n) \cdot (n + 1)}{2} = 1\,981$. Această ecuație de gradul doi nu are rădăcini numere naturale, deci termenul nu face parte din șir.

b) Pe locul 100 va fi termenul:

$$a_{100} = 100 + 101 + 102 + \ldots + 200 = \frac{(100 + 200) \cdot 101}{2} =$$

$$= 150 \cdot 101 = 15\,150.$$

31. Fie $a; a_1; a_2; \ldots; a_n \in \{1; 2; \ldots; 9\}$, iar $A = \overline{a_1 \ldots a_n} + \overline{a_2 \ldots a_n a_1} + \ldots + \overline{a_n a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1}}$. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1 a_2 \ldots a_n$ astfel ca A să fie de forma $aa \ldots a$.

Maria Barbu — G.M. nr. 8/1985

R: $A = 12 + 21 = 33$; $A = 34 + 43 = 77$; $A = 123 + 231 + 312 = 666$

Mai sînt și alte soluții?

32. Determinați două numere de cîte nouă cifre fiecare, scrise cu cifrele 1; 2; 3; ...; 9 (cifrele folosite pentru scrierea unui număr nu se repetă) și pentru care suma lor este un număr de aceeași formă (adică are nouă cifre și acestea sînt 1, 2, ..., 9).

* * * — G.M. nr. 11—12/1986

R: $123\,456\,789 + 123\,456\,798 = 246\,913\,587$

B) SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE

1. Cîte numere de trei cifre de forma $\overline{abc}$ satisfac egalitatea $\overline{abc} - \overline{cba} = 297$?

C. Ionescu — Tiu — G.M. nr. 9/1986

Soluție: $100a + 10b + c - 100c - 100b - a = 297$ sau $a - c = 3$, de unde putem avea soluțiile: $a = 4$ și $c = 1$; $a = 5$ și $c = 2$; $a = 6$ și $c = 3$; $a = 7$ și $c = 4$; $a = 8$ și $c = 5$; $a = 9$ și $c = 6$. Pentru fiecare variantă litera b, adică zecile, poate fi o cifră de la 0 la 9. În total sînt 60 numere care îndeplinesc condițiile simultan.

2. Să se determine toate numerele de patru cifre (distincte) în baza zece, $\overline{abcd}$, știind că sînt îndeplinite simultan condițiile:

$$(1)\ \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc} \text{ și } (2)\ b - c = d.$$

Dragomir Costea — G.M. nr. 12/1982

Soluție: Condițiile devin: $10(a + c - d) = c - b - d$, și $b - c - d$, de unde $d = 5(d - a)$; $5a = 4d$.

Pentru $d = 5$ $a = 4$ și $\begin{array}{c|ccccc} b & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline c & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$, de unde obținem numerele: (4 505); 4 615; 4 725; 4 835; 4 945.

3. Să se găsească toate numerele scrise în baza zece de forma $\overline{abc}$ cu $a \geq b \geq c$ și $a - b - c = 4$.

Stela Tomulescu — G.M. nr. 2/1981

R: 950; 941; 932; 840; 831; 730; 721; 621; 510

4. Să se afle numerele naturale a, b, c, știind că $3c = a - b$, $5a + 10b + 12c = b(15 + ac)$.

D. Săvulescu — G.M. nr. 6/1986

Ed. 92 școala 8

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Înlocuind pe c în a doua relație, se obține $27(a - b) = ab(a - b) \Leftrightarrow ab = 27$ și $a = 9$, $b = 3$, $c = 2$.

5. Găsiți numerele de forma $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ care verifică egalitatea $\overline{ab} - \overline{cd} = a + b + c + d$.

Liviu Pîrsan — G.M. nr. 9/1987

Soluție: Condiția se mai scrie astfel: $9a = 11c + 2d$. Se obțin soluțiile:

$a = 6$; $c = 4$; $d = 5$, $b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
$a = 8$; $c = 6$; $d = 3$, $b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
$a = 4$; $c = 2$; $d = 7$, $b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

6. Scrieți perechi de numere naturale pare a căror sumă este dublul diferenței acestor numere.

Domnica Preoteasa — G.M. nr. 12/1982

R: (2, 6); (4, 12); (6, 18); ...

7. Să se determine numerele reale a, b, c știind că îndeplinesc simultan condițiile:

1) $a + c = 20$; 2) $a - b = 5$; 3) $b - c = 5$.

Marius Ilioaea — G.M. nr. 1/1982

R: $a = 15$; $b = 10$; $c = 5$

8. Să se determine elementele mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$ știind că acestea sînt în baza 10 și are loc egalitatea

$$a + \overline{ab} - \overline{abc} + \overline{abcd} = 1\,981.$$

Francisc Csaki — G.M. nr. 3/1981

R: $A = \{2, 1, 7, 5\}$

9. Să se determine toate numerele naturale de trei cifre astfel încît diferența dintre număr și răsturnatul său să fie un număr natural de trei cifre avînd prima cifră egală cu 5.

Florian Buze — G.M. nr. 9/1975

Soluție: Condiția $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{5xy}$ se transpune în $99(a - c) = \overline{5xy}$. Obținem cazurile: $a = 7$ și $c = 1$; $a = 8$ și $c = 2$;

Scanned with OKEN Scanner

$a = 9$ și $c = 3$; iar pentru fiecare caz $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ în total sînt 30 de numere.

10. Demonstrați că numărul $\overline{abab} - \overline{baba}$ se divide cu 909.

x x x — G.M. nr. 2/1988

Soluție : $\overline{abab} - \overline{baba} = (a - b) \cdot 909$

11. Să se reconstituie scăderea $\overline{abba} - \overline{baab} = 6\,237$.

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 11—12/1987

Soluție : Condiția devine $891 \cdot (a - b) = 6\,237$, de unde $a - b = 7$, avem : $a = 9$ și $b = 2$; $a = 8$ și $b = 1$, deci : $9\,229 - 2\,992 = 6\,237$; $8\,118 - 1\,881 = 6\,237$.

12. Să se determine cifrele x, y, z, t în baza 10 astfel încît $\overline{xyzt} - \overline{xyz} - \overline{xy} - x = 1\,759$.

D.M. Bătinețu — G.M. nr. 3/1977

R : $\overline{xyzt} = 1\,976$

13. Să se reconstituie scăderea $\overline{a89b} - 4\,905 = \overline{b98a}$.

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 3/1986

Soluție : $b < 5$ rezultă $10 + b - 5 = a$ sau $a - b = 5$

a	6	7	8	9
b	1	2	3	4

14. Să se reconstituie scăderea :

LEONHARD — 12 325 551 = EULER

unde literele distincte reprezintă cifre distincte

Revista „Alpha", R.D.G. — G.M. nr. 12/1984

R : 12 345 678 — 12 325 551 = 20 127

15. Considerăm sumele $S_n = \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ iar semnele + și — se iau în toate modurile posibile.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se arate că $|S_n| \leq \frac{n(n+1)}{2}$ pentru orice $n \in N^*$ și pentru orice sumă S_n.

b) Cîți termeni are suma alternantă $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots - (n-1) + n$, știind că $S_n = 1\,987$?

Concursul de matematică — G.M. nr. 9/1987

Ionel Tudor și Mircea Trifu

Soluție: a) Dacă toți termenii ar fi luați cu semnul +, avem $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dar dacă apar și termeni cu semnul —, $S_n < \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $S_n = 1 + (3-2) + (5-4) + (7-6) + \ldots + n - (n-1) = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = 1\,987$. Deci, numărul termenilor va fi: $2 \cdot 1\,986 + 1 = 3\,973$.

16. Să se arate că oricum am lua 11 numere naturale, cuprinse între 1 și 100, există cel puțin două a căror diferență nu depășește pe 9 și cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

x x x — G.M. nr. 4/1977

Soluție: Dacă vom lua 10 numere a căror diferență este 9 (sau mai mare decît 9), atunci cel de-al unsprezecelea număr trebuie să fie cuprins între două numere din primele zece și, deci, diferența între cel puțin două este mai mică decît 9.

Dacă am lua numerele în așa fel încît primele zece să aibă diferența de o unitate, atunci al unsprezecelea număr ar avea același număr de unități cu cel puțin unul din celelalte zece numere.

Scanned with OKEN Scanner

C) ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE

1. Un elev, la înmulțirea a două numere de cîte trei cifre, a scris din greșeală cifrele deînmulțitului cu o unitate mai mică și i-a dat la rezultat 82 176 în loc de 110 592. Care sînt cele două numere?

Gh. Hulea — G.M. nr. 12/1981

Soluție: Notînd deînmulțitul cu $\overline{abc}$ și înmulțitorul cu $\overline{efg}$, avem $\overline{abc} \cdot \overline{efg} = 110\,592$ (1). Dar elevul a scris deînmulțitul astfel $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)}$, atunci produsul va fi:

$\overline{(100a - 100 + 10b - 10 + c - 1)} \cdot \overline{efg} = 82\,176$

$\overline{(abc - 111)} \cdot \overline{efg} = 82\,176 \quad \overline{abc} \cdot \overline{efg} - 111 \cdot \overline{efg} = 82\,176$, de unde $111 \cdot \overline{efg} = 28\,146$ sau $\overline{efg} = 256$.

Din relația (1) $\overline{abc} = 432$.

2. Un elev trebuie să înmulțească două numere. Din greșeală, în locul ultimelor două cifre din înmulțitor a scris ultima cifră cu o unitate mai mare, iar penultima cifră cu o unitate mai mică și în loc de 1 776 a obținut 1 443.

Care sînt cele două numere care trebuiau înmulțite?

Cornel C. Maroti — G.M. nr. 6/1984

R: $37 \cdot 48 = 1\,776$; $37 \cdot 39 = 1\,443$.

3. Să se determine numărul $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab} = k \cdot a \cdot b$, unde a și b sînt cifre în baza zece și k număr natural.

Anca Mărculescu — G.M. nr. 4/1980

R: $12 = 6 \cdot 1 \cdot 2$, $k = 6$; $15 = 3 \cdot 1 \cdot 5$, $k = 3$.

Mai sînt și alte soluții?

4. Să se determine a, b, c din sistemul zecimal astfel încît să aibă loc egalitatea $a \cdot \overline{bc} = \overline{cba}$.

Dragomir Costea — G.M. nr. 1/1987

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $a \cdot \overline{bc} = \overline{cba} \Leftrightarrow a(10b + c) = 100c + 10b + a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10b(a - 1) = 100c + a(1 - c)$. Cum $1 - c \geq 0$, rezultă sau $c = 0$ sau $c = 1$. Dacă $c = 0$, atunci $\overline{cba}$ ar fi un număr de două cifre, deci este imposibil. Dacă $c = 1$, atunci $10 \cdot b \cdot (a - 1) =$ $= 100c$ sau $b(a - 1) = 10c$ sau $b(a - 1) = 10$. Distingem două cazuri:
Din $a - 1 = 2$, avem $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$; $3 \cdot 51 = 153$
Din $a - 1 = 5$, avem $a = 6$, $b = 2$, $c = 1$; $6 \cdot 21 = 126$.

5. Să se determine cifrele a și b din înmulțirea $\overline{aa} \cdot \overline{bb} =$ $= \overline{b8b}$, $(a, b \neq 0)$.

Ion Predescu — G.M. nr. 9/1987

R: $a = 1$ și $b = 4$

6. Să se afle numărul $\overline{ab}$, în baza zece, care verifică relația $\overline{ab} \cdot \overline{ba} = \overline{xya}$, unde cifrele numărului $\overline{xya}$ sînt consecutiv descrescătoare.

Gh. Moraru — G.M. nr. 2/1980

R: $\overline{ab} = 51$; $51 \cdot 15 = 765$

7. Să se determine cifrele x, y, z scrise în baza zece, știind că $\overline{xx} \cdot \overline{yy} = \overline{xzzx}$.

Remus Vrabie — G.M. nr. 3/1979

R: $x = 5$, $y = 9$, $z = 4$

8. Să se determine cifrele distincte x, y, z știind că în baza zece avem: $\overline{x0x} \cdot \overline{y0y} = \overline{z0x0z0}$.

Grigore Preoteasa — G.M. nr. 12/1981

R: $x = 2$, $y = 5$, $z = 1$ și $x = 8$, $y = 5$, $z = 4$

9. Determinați numărul $\overline{abab}$ care verifică relația $\overline{abab} =$ $= \overline{ab}\,(\overline{ab} + a + b)$. Toate numerele sînt scrise în baza zece.

Gh. Moraru — G.M. nr. 12/1979

Soluție: Condiția problemei devine $\overline{ab} \cdot 101 = \overline{ab}\,(\overline{ab} +$ $+ a + b)$ sau $11a + 2b = 101$, de unde $a = 9$ și $b = 1$.

10. Determinați cifrele a și b în baza 10, dacă $a \cdot b \cdot \overline{ab} - b \cdot a \cdot \overline{ba} = \overline{a(a-2)(a-1)}$.

Niculae Grigorescu — G.M. nr. 2/1984

R: a = 7, b = 4

11. Să se determine cifrele distincte a, b și c știind că $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - \overline{bc} \cdot \overline{cb} + a - c = 1\,980$.

Soluția este unică?

Sorin Kolir — G.M. nr. 9/1981

R: a = 5, b = 9, c = 8. Încercați și alte soluții pentru a — c, din relația $(a - c)\,[100b + 10(a + c) + (b + 1)] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

12. Știind că x, y sînt cifre distincte, scrise în baza zece, și că este îndeplinită relația $\overline{xyx} + \overline{xxy} + \overline{xyy} = \overline{3xx}$, să se determine cifrele x și y.

D.V. Preduț — G.M. nr. 12/1981

R: x = 1 și y = 0

13. Să se determine cifrele x și z din numerele care satisfac egalitatea: $\overline{3xx5} = z \cdot \overline{6x1} + \overline{1x0}$. Aceste numere sînt scrise în baza zece.

Lucian Ungureanu — G.M. nr. 3/1981

Soluție: Condiția se va scrie astfel: $2\,905 + 100x = z(601 + 10x)$, de unde z = 5 și x = 2.

R: x = 2, z = 5

14. Să se determine numerele din înmulțirea $\overline{de} \cdot \overline{6fg} = \overline{ab89}$, $(a, d \neq 0)$.

Bogdan-Tudor Stănoiu — G.M. nr. 1/1986

Soluție: Cifra d trebuie să fie 1 deoarece dacă ar fi 2 sau mai mare produsul $\overline{de} \cdot \overline{6fg}$ ar fi de 5 cifre.

Pentru e și g avem mai multe cazuri:

I) e = 3, g = 3, rezultă f = 5, adică $13 \cdot 653 = 8\,489$

II) e = 1, g = 9, rezultă f = 9, adică $11 \cdot 699 = 7\,689$

Mai sînt și alte variante?

Scanned with OKEN Scanner

15. Să se reconstituie înmulțirea

$$\begin{array}{r} \overline{48}\ x \\ \overline{ab} \\ \hline \overline{cde} \\ \overline{fgh} \\ \hline \overline{3xy4} \end{array}$$

știind că a, b, c, d, e, f, g, h, x, y sînt cifre ale sistemului zecimal, iar y este o cifră pară.

Cîte soluții are problema ?

Gh. Muraru — G.M. nr. 1/1984

Soluție : Ultima cifră a primului produs parțial trebuie să fie 4, deci e = 4, atunci b poate fi sau 3 sau 8.

Cazul I. Dacă b = 3, atunci înmulțirea devine

$$\begin{array}{r} \overline{48}\ \times \\ \overline{a3} \\ \hline 144 \\ \overline{fgh} \\ \hline \overline{3xy4} \end{array}$$

Pentru ca prima cifră a produsului să fie 3, trebuie să alegem a = 8, atunci înmulțirea devine

$$\begin{array}{r} 48\ \times \\ 83 \\ \hline 144 \\ 384 \\ \hline 3984 \end{array}$$

deci, a = 8, b = 3, c = 1, d = 4, e = 4, f = 3, g = 8, h = 4, x = 9, y = 8.

Cazul al II-lea : a = 6, b = 8, c = 3, d = 8, e = 4, f = 4, g = 8, h = 8, x = 2, y = 6.

16. Să se reconstituie înmulțirea :

$$\begin{array}{r} 46\times \\ ** \\ \hline *** \\ *** \\ \hline 1*78 \end{array}$$

unde steluțele reprezintă cifrele scrise în baza zece.

Dana Tecioiu — G.M. nr. 1/1979

R: $46 \times 43 = 1\,978$

17. Să se determine cifrele a, b, c, d, e, f și t din înmulțirea $\overline{abcdef} \times f = \overline{ttttt}$ (literele distincte reprezintă cifre distincte).

Manuela-Maria Bolovan — G.M. nr. 7/1986

R: $f = 7$

18. Să se reconstituie înmulțirea

$$\begin{array}{r} ** \times \\ *2 \\ \hline 4* \\ *1* \\ \hline **** \end{array}$$

știind că * sînt cifre scrise în baza zece.

Simiona Zavera — G.M. nr. 12/1981

R: $24 \cdot 92 = 2\,208$

19. Să se reconstituie înmulțirea

$$\begin{array}{r} 1* \times \\ ** \\ \hline *** \\ ** \\ \hline ***0 \end{array}$$

unde steluțele reprezintă cifre în baza zece.

Cîte soluții are problema?

Dinu Constantin — G.M. nr. 9—10/1982

R: $15 \times 68 = 1\,020$

20. Să se reconstituie înmulțirea

$$\begin{array}{r} \overline{\text{DOI}} \times \\ \overline{\text{DOI}} \\ \hline **** \\ *** \\ \hline \overline{\text{PATRU}} \end{array}$$

unde literele diferite reprezintă cifre diferite în baza zece.

Vasile Negoiță — G.M. nr. 5/1985

Soluție: Litera O trebuie înlocuită prin zero, deoarece al doilea produs parțial începe cu ordinul sutelor. Litera D trebuie să fie 2 sau 3 deoarece produsul $D \cdot D < 10$. Litera I trebuie să fie mai mare decît 3 deoarece produsul $I \cdot \ldots > 10$ pentru a nu se obține $R = 0$.

Deci, una din soluții va fi $209 \times 209 = 41\,681$.

21. Să se reconstituie înmulțirea

$$\begin{array}{r} 2** \times \\ ** \\ \hline 2** \\ *** \\ \hline ***5 \end{array}$$

unde * reprezintă cifre în baza zece.

Constantin Boangiu — G.M. nr. 6/1985

R: $275 \times 31 = 8\,525$

Mai sînt și alte soluții?

22. Să se determine cifrele a, b astfel încît numărul $A = \overline{aabaa}$, scris în baza 10, să fie divizibil cu 109

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 12/1982

Soluție: Scriem poziționat astfel:

$$\begin{array}{r} 109 \\ \hline *** \\ *** \\ \hline aabaa \end{array}$$

R : a = 9 și b = 2 ; A = 99 299

23. Să se reconstituie înmulțirea

$$\begin{array}{r} 46\ \times \\ ** \\ \hline *** \\ *** \\ \hline 1*78 \end{array}$$

unde stelutele sînt cifre în baza 10.

Dana Tecioiu — G.M. nr. 1/1979

R : $46 \times 43 + 1\,978$

24. Reconstituiți înmulțirea

$$\begin{array}{r} 2** \times \\ 3** \\ \hline 5** \\ *4* \\ **3 \\ \hline ***** \end{array}$$

Revista „Alpha" nr. 6 — G.M. nr. 3/1987

Soluție : Ultima cifră a primului factor trebuie să fie 1 deoarece ultima cifră a celui de-al treilea produs parțial este 3. Ultima cifră a celui de-al doilea factor trebuie să fie 2 pentru ca înmulțit cu 2 să nu depășească pe 5.

Înmulțirea devine :

$$\begin{array}{r} 2*1\ \times \\ 3*2 \\ \hline 5*2 \\ *4* \\ **3 \\ \hline ****2 \end{array}$$

Scanned with OKEN Scanner

A doua cifră a primului factor trebuie să fie 7, iar a doua cifră a celui de-al doilea factor trebuie să fie 2. Avem : $271 \times 322 = 87\,262$.

25. Am făcut o înmulțire și am oprit din calcul numai cifra 5, iar pe celelalte le-am înlocuit cu $*$. Calculul se prezintă astfel :

$$\begin{array}{r} 5** \times \\ 5** \\ \hline 5** \\ *5* \\ **5 \\ \hline **5** \end{array}$$

Să se restabilească înmulțirea.

Ion Ionescu — G.M. nr. 2/1934

R : 527×521 ; 589×541 ; 539×591 ; 563×541

26. Se dă înmulțirea

$$\begin{array}{r} 1269*4 \times \\ yy \\ \hline ****** \\ ****** \\ \hline zyyyy6* \end{array}$$

Să se determine cifrele x, y, z știind că $x \neq y \neq z \neq x$.

L. Mănescu — G.M. nr. 10/1981

R : $x = 8$, $y = 7$, $z = 9$

27. Să se determine cifrele nenule și distincte a, b, c, d, e astfel încît înmulțirea

$$\begin{array}{r} \overline{abed} \times \\ \overline{be} \\ \hline ***** \\ ***3 \\ \hline dabce \end{array}$$

să fie corectă. Cîte soluții sînt?

Sorin Furtună — G.M. nr. 7/1982

R: 2 148 × 15 = 32 145

Mai sînt și alte soluții?

28. Să se reconstituie înmulțirea $1\,185\,184 \times \overline{ab} = \overline{cccccc00}$, unde a, b, c reprezintă cifre în baza zece și $a \neq 0$.

C.C. Dinu — G.M. nr. 8/1979

R: a = 7, b = 5, c = 8

29. Reconstituiți înmulțirea

$$\begin{array}{r} *** \times \\ ** \\ \hline 152* \\ 1*5* \\ \hline ****4 \end{array}$$

unde literele * reprezintă cifre distincte sau nu.

Tudor Bănică — G.M. nr. 1/1987

R: 331 × 54 = 17 874

30. Să se reconstituie înmulțirea în baza zece

$$\begin{array}{r} DOI \times \\ DOI \\ \hline **** \\ **** \\ **** \\ \hline ***DOI \end{array}$$

Aurel Dobrșan — G.M. nr. 9/1979

Soluție: $I \in \{0, 1, 5, 6\}$. Dar $I = 1$ nu poate fi deoarece primul produs parțial are 4 cifre. Dacă $I = 5$, atunci $O = 2$ și $D = 6$. $625 \times 625 = 390\,625$

Încercați și $I = 6$.

31. Să se reconstituie în baza 10 înmulțirea

$$\begin{array}{r} \text{TREI} \times \\ \text{TREI} \\ \hline *****\ \\ *****\ \\ *****\ \\ *****\ \\ \hline ****\text{TREI} \end{array}$$

unde literele reprezintă cifre;

x x x — G.M. nr. 2/1979

Soluție: $I \in \{0, 1, 5, 6\}$ și $\overline{TREI}^2 = M \cdot 10\,000 + \overline{TREI}$. Pentru $I = 6$, avem $T = 9$, $R = 8$, $E = 7$.

32. Dacă steluțele reprezintă cifre în baza zece, să se decidă dacă înmulțirea

$$\begin{array}{r} ***7 \times \\ **** \\ \hline **** \\ ***8\ \\ **** \\ **** \\ \hline ******* \end{array}$$

este corectă sau nu.

D. Acu — G.M. nr. 1/1979

R: Da, de exemplu $1\,047 \times 1\,392 = 1\,457\,424$.

33. Să se determine cifrele x și y astfel încît să avem egalitatea $8 \cdot \overline{xxxxx} = \overline{yxxxxx} - y$.

R: $x = 9$ și $y = 2$

34. Se dă numărul $N = \overline{ab4cd4}$ scris în baza 10. Înmulțindu-l pe N cu un număr prim $x < 30$, obținem numărul $\overline{a36z894}$. Să se afle N.

Eusebiu-Marius Golopența — G.M. nr. 11—12/1986

R: $N = 124\,854$

35. Să se reconstituie împărțirea $\overline{abcd} : 4 = \overline{dcba}$ (numele sînt scrise în baza zece).

I. Trifon — G.M. nr. 6/1979

R: $2\,178 \times 4 = 8\,712$, deci $8\,712 : 4 = 2\,178$

36. Să se determine cifrele a, b, c, d, e astfel încît să avem $\overline{abcde} \cdot 4 = \overline{edcba}$. Numerele sînt scrise în baza 10.

Ludovic Bîra — G.M. nr. 7/1981

R: $21\,978 \cdot 4 = 87\,912$

37. Dacă la un număr de 5 cifre scris în baza zece punem la stînga cifra 2, obținem un număr de 2 ori mai mare decît dacă am pune cifra 3 în dreapta numărului. Să se afle acest număr.

Vasile Pasenciuc — G.M. nr. 9—10/1982

Soluție: $\overline{2abcde} = 2 \cdot \overline{abcde3}$, $\overline{abcde} = 10\,526$

38. Care este cel mai mic număr de forma $\overline{x_1x_2\ldots x_n2}$ cu proprietatea că $\overline{x_1x_2\ldots x_n2} = 3 \cdot \overline{2x_1x_2\ldots x_n}$, ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt cifre în baza zece).

M. Barbu — G.M. nr. 6/1982

R: $3 \cdot 285\,714 = 857\,142$

39. Dacă la un număr de 5 cifre punem în dreapta cifra 9, obținem un număr de 4 ori mai mic decît s-ar obține punînd cifra 9 în stînga numărului. Să se afle acest număr.

Vasile Pasenciuc — G.M. nr. 7/1982

R: $230\,769 \times 4 = 923\,076$

40. Aflați toate numerele de cinci cifre scrise în baza 10 în care produsul dintre suma primelor două cifre și numărul format din ultimele trei cifre este 1 985.

Marin Stoica și Ion Stoica — G.M. nr. 1/1987

Soluție: $N = \overline{abcde}$; $(a + b)(100c + 10d + e) = 5 \cdot 397$

$N = \{14\,397, 23\,397, 32\,397, 41\,397, 50\,397\}$.

41. Fie $\overline{9xyzu4}$ un număr de 6 cifre scrise în baza 10. Să se determine cifrele x, y, z, u astfel încît numărul dat să fie produsul a trei numere naturale consecutive.

I. Albescu — G.M. nr. 8/1978

R: $x = 4,\ y = 1,\ z = 0,\ u = 9$; $941\,094 = 97 \cdot 98 \cdot 99$

42. Fiecare membru al colectivului unei clase dă cîte o fotografie a sa tuturor celor de același sex cu el. Diferența dintre numărul fotografiilor primite de băieți și cel al fotografiilor primite de fete este de 140.

Cîți elevi sînt în clasă? Soluția este unică?

C. Iancu — G.M. nr. 4/1979

Soluție: Notăm cu n numărul băieților și cu m al fetelor. Atunci condiția problemei se scrie: $n(n-1) - m(m-1) = 140$ sau $(n-m)(n+m-1) = 4 \cdot 5 \cdot 7$

I) $n - m = 4$ și $n + m - 1 = 35$, de unde $n = 20$, $m = 16$. Găsiți celelalte soluții.

43. Să se afle cu ce cifră se termină produsul numerelor prime mai mari decît 6 și mai mici decît 100.

Gh. Neagu — G.M. nr. 10/1985

Soluție: Numerele prime mai mari decît 6 și mai mici decît 100 sînt: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Numerele care se termină cu cifra 1 nu schimbă ultima cifră a produsului.

Sînt 6 numere care se termină cu cifra 3, deci produsul acestora se termină cu 9. Sînt 6 numere care se termină cu cifra 7, deci produsul lor se termină cu 9. Sînt cinci numere care se termină cu cifra 9, deci produsul lor se termină cu 9.

Deci produsul cerut se va termina cu 9.

44. Fără a efectua înmulțirile, verificați egalitatea:

$55\,554 \times 55\,559 \times 55\,552 - 55\,556 \times 55\,551 \times 55\,558 = 66\,665 \times 66\,670 \times 66\,663 - 66\,667 \times 66\,662 \times 66\,669$

x x x — G.M. nr. 2/1988

Soluție: Trebuie să verificăm $P_1 - P_2 = P_3 - P_4$.

Notăm cu $A = 55\,555$, atunci:

$P_1 = (A - 1)(A + 4)(A - 3) = A^3 - 13A + 12$
$P_2 = (A + 1)(A - 4)(A + 3) = A^3 - 13\ A - 12$, atunci
$P_1 - P_2 = 24$
Notăm cu $B = 66\,666$, atunci:
$P_3 = (B - 1)\ (B + 4)\ (B - 3) = B^3 - 13\ B + 12$
$P_4 = (B + 1)\ (B - 4)\ (B + 3) = B^3 - 13\ B - 12$, atunci
$P_3 - P_4 = 24$, deci $P_1 - P_2 = P_3 - P_4$.

45. Se dă numărul $A = \overline{aa...a}$ format din k cifre, scris în baza 10, cu $a > 4$. Dacă p este un număr natural strict mai mare decît 1, atunci numărul pA are cel puțin $k + 1$ cifre.

Ion Voicu — G.M. nr. 12/1980

Soluție: Dacă $k > 1$ și $a > 4$, rezultă $k \cdot a > 10$, deci
$pA = p \cdot \underbrace{\overline{aa...a}}_{k \text{ cifre}} = p \cdot a \cdot \underbrace{11...1}_{k \text{ cifre}} > 11...10$ ($k + 1$ cifre)

46. Numărul A este scris cu 22 cifre de 3, iar numărul B este scris cu 88 cifre de 9. Cîte cifre va avea produsul $A \times B$? (Numerele din problemă sînt scrise în baza 10).

Francisc Csaki — G.M. nr. 12/1980

Soluție: Numărul B, format din 88 cifre de 9, înmulțit cu 3 unități va da primul produs parțial format din 89 cifre. Înmulțind mai departe cu zecile, sutele ș.a.m.d. cu încă 21 de 3, pentru fiecare produs parțial se va scrie deplasat spre stînga cu o unitate față de precedentul. Deci, produsul total $A \times B$ se va mări cu încă 21 cifre. În total produsul $A \times B$ va avea $89 + 21 = 110$ cifre.

47. Se consideră numărul $N = 37037...037037$, scris în baza 10, și care are $3n + 2$ cifre. Să se demonstreze că produsul numerelor $3 \cdot m$ și N este un număr de forma $M = mm...m$, avînd $3(n + 1)$ cifre, pentru orice m natural, $1 \leq m \leq 9$.

Francisc Varga — G.M. nr. 8/1983

Soluție: Numărul N are n grupe de 037 și încă o grupă, în față, de 37. Produsul $037 \times 3 = 111$, atunci $3N = 37037...$ $...037 \times 3 = 111\ 111\ ...\ 111$ format din $3n + 3$ cifre. Deci, $m \cdot$

Gd. 92 coala 3

Scanned with OKEN Scanner

· 3 · N = m × 111 111 ... 111 = $\overline{mmm...mmm}$ care va avea 6n + 3 cifre, adică 3(n + 1) cifre.

48. Se consideră două numere N_1 și N_2 de cîte 3 cifre fiecare, în baza 10, a căror sumă este egală cu 999. Scriind a este numere unul lîngă altul, în ordinea N_1N_2 și N_2N_1, se obțin două numere de cîte 6 cifre fiecare, astfel încît unul este mai mare decît celălalt de 6 ori.

Să se afle numerele N_1 și N_2.

Ioan Stoicescu ! G.M. nr. 2/1977

Soluție: Notăm $N_1 = \overline{abc}$ și $N_2 = \overline{xyz}$. Condițiile problemei se scriu astfel : $\overline{abc} + \overline{xyz} = 999$ și $\overline{abcxyz} = 6 \cdot \overline{xyzabc}$.

A doua relație se mai scrie $1\,000 \cdot \overline{abc} + \overline{xyz} = 6 \cdot 1\,000 \cdot \overline{xyz} + 6 \cdot \overline{abc}$ sau $994 \cdot \overline{abc} = 5\,999 \cdot \overline{xyz}$ sau $142 \cdot \overline{abc} = 857 \cdot \overline{xyz}$.

Cum (142, 857) = 1, rezultă $\overline{abc} = 857$ și $\overline{xyz} = 142$.

Scanned with OKEN Scanner

D) ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE

1. Să se găsească toate numerele de două cifre care se divid prin diferența cifrelor lor, dînd cîtul 21.

Ana Bogdan — G.M. nr. 6/1986

Soluție: Condiția problemei devine $10a + b = 21(a - b)$ sau $a = 2b$.

R: 21; 42; 63; 84

2. Numărul 875 se împarte la un număr natural A și se obține restul 7. Să se afle toate valorile posibile ale lui A.

Valerica Dinu — G.M. nr. 11—12/1987

Soluție: $875 - 7 = 368 = 2^4 \cdot 23 = B$, atunci A = {8, 16, 23, 46, 92, 184, 368}.

3. Să se determine toate numerele care împărțite la 9 dau cîtul c și restul r și care împărțite la 5 dau cîtul r și restul c.

Ștefan Apetrei — G.M. nr. 4/1977

Soluție: Fie a numărul căutat. Condițiile problemei se scriu astfel: $a = 9c + r$ și $a = 5r + c$, de unde avem $r = 2c$. Dar $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ și $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Înlocuind $r = 2c$ într-o relație, avem $a = 11c$. Deci, $a \in \{0, 11, 22, 33, 44\}$.

4. Aflați numerele naturale scrise în baza 10 care împărțite la 15 dau un rest egal cu pătratul cîtului.

Bogdan Grigoriu — G.M. nr. 2/1979

Soluție: Condiția problemei devine $D = 15c + c^2$ sau $D = c(15 + c)$.

R: 16; 84; 54

5. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încît la împărțirea cu 121 să dea un rest egal cu puterea a patra a cîtului.

Ioan Cuc — G.M. nr. 4/1982

Soluție: $n = c(121 + c^3)$, $c^4 < 121$. Pentru $c = 2$, avem $n = 258$. Găsiți și alte valori.

6. Se cer două numere al căror produs este egal cu 120 și astfel încît împărțind suma lor la diferența lor se obține cîtul 1 și restul 10.

Mihaela Marinescu — G.M. nr. 9—10/1982
R: $a = 24$ și $b = 5$

7. Să se determine toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$ al căror rest al împărțirii prin 53 este egal cu 1/3 din pătratul cîtului.

Ștefan Smarandache — G.M. nr. 5/1982
R: $n \in \{162, 330, ...\}$

8. Să se determine 3 numere naturale consecutive știind că primul micșorat cu 6 unități face tot cît jumătate din al treilea plus 6 unități.

I. Ungureanu — G.M. nr. 2/1977
R: 26, 27, 28

9. Să se determine numerele de două cifre care se divid cu suma cifrelor lor dînd cîtul 7, în sistem zecimal.

Aurel Doboșan — G.M. nr. 4/1983
R: 21; 42; 63; 84

10. Să se determine cifrele a, b și c astfel încît numărul $\overline{2abc4}$ împărțit la 973 dă restul 15.

M. Gavrilă — G.M. nr. 4/1975
R: $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$

11. Să se determine numerele naturale de 8 cifre care încep și se termină cu aceeași cifră și care împărțite la 25 dau restul 16.

Nicușor Fota — G.M. nr. 1/1986

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $\overline{aba} = 25c + 10$

R: 535. Mai sînt și alte soluții?

12. Să se afle numerele naturale a și b știind că $a + b = 155$, iar $a - b$ împărțit la b dă restul 12.

Gh. Gh. Petrescu — G.M. nr. 8/1983

R: $a = 142$; $b = 13$

13. Să se determine A avînd ca elemente acele numere naturale de două cifre care împărțite la suma cifrelor lor să ne dea un cît cu o unitate mai mare decît cifra zecilor.

Francisc Csaki — G.M. nr. 8/1986

R: $A = \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90\}$.

14. Să se arate că un singur număr de două cifre se împarte exact la suma cifrelor sale dînd cîtul 8.

Care este acest număr?

Ion Scarlat — G.M. nr. 8/1977

R: 27

15. Care este numărul natural A astfel ca împărțind numerele 185 și, respectiv, 83 la A să obținem resturile 9 și, respectiv, 6?

Valeriu Borandă — G.M. nr. 10/1980

Soluție: $A > 9$, $185 = A \cdot c_1 + 9$ și $83 = A \cdot c_2 + 6$, de unde $99 = A(c_1 - c_2)$ sau $9 \cdot 11 = A(c_1 - c_2)$. Dar $A > 9$, rezultă $A = 11$.

16. Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit pe rînd la 372 și 738 dă resturile 362 și respectiv 728.

Ștefan Smarandache — G.M. nr. 9—10/1982

Soluție: Condițiile problemei devin: $a = 372q_1 + 362$ și $a = 738q_2 + 728$, de unde avem $62q_1 - 123q_2 = 61$ sau $62(2q_2 - q_1 + 1) = q_2 + 1$.

Punînd condiția ca a să fie minim, trebuie ca: $q_2 + 1 = 62$ și $2q_2 - q_1 + 1 = 1$, adică $q_2 = 61$ și $q_1 = 122$, deci $a = 45\,746$.

17. Un număr de 3 cifre împărțit la răsturnatul său dă cîtul 3 și restul 175, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților numărului este 7. Să se afle numărul.

Gheorghe Corina — G.M. nr. 11—12/1987

R : 952. Mai există și altă soluție?

18. Să se afle numărul natural de 3 cifre $\overline{abc}$ care împărțit la 5 să dea cîtul $\overline{bc}$ și restul a.

Petru Peiov — G.M. nr. 5/1987

R : 499

19. Un număr de 3 cifre are prima și ultima cifră egale, iar cifra din mijloc este 6. Acest număr împărțit la alt număr format dintr-o singură cifră dă restul 7. Să se găsească deîmpărțitul, împărțitorul și cîtul acestei împărțiri.

Mihaela Anca Tomaș — G.M. nr. 5/1986

R : D = 767, I = 8, C = 95, R = 7

20. Împărțind numerele 1 774, 2 780 și 4 687 cu același număr natural n, obținem, respectiv, resturile 10, 8, 7. Să se arate că există mai multe numere naturale n care dau resturile indicate și să se determine acestea.

xxx — G.M. nr. 8/1977

Soluție: $1\,764 = nq_1$; $2\,772 = nq_2$; $4\,680 = nq^3$ sau $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = nq_1$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = nq_2$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = nq_3$ unde $n > 10$, atunci $n = \{2^2 \cdot 3; 2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3^2\} = \{12; 18, 36\}$.

21. Cîte numere naturale de 3 cifre scrise în baza 10, împărțite la 111, 222 și 333 dau același rest? Cîte sînt de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$, cu $a \neq b$?

Tudor I. Băiețica — G.M. nr. 3/1979

Soluție: $n = 111q_1 + r$; $n = 222q_2 + r$; $n = 333q_3 + r$ sau $111(2q_2 - q_1) = 0$; $111(3q_3 - 2q_2) = 0$ sau $2q_2 = 2q_1$ și $3q_3 = 2q_2$.

Pentru $q_1 = 6$; $q_2 = 3$ și $q_3 = 2$ avem $n = 666 + r$, unde $r \leq 110$, adică $r = \{0; 1; 2; \ldots; 110\}$. În total sînt 111 numere care îndeplinesc condiția întîi.

Scanned with OKEN Scanner

De forma $\overline{aab}$ sînt: 667, 668, 669, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, deci 10 numere.

De forma $\overline{aba}$ sînt: 676, 686, 696, 707, 717, 727, 737, 747, 757, 767, deci 10 numere.

De forma $\overline{baa}$ sînt: 677, 688, 699, 700, 711, 722, 733, 744, 755, 766, deci tot 10 numere.

22. Să se afle toate numerele naturale de două cifre care împărțite simultan la 3, 4 și 5 dau același rest.

M. Gh. Flutur — G.M. nr. 4/1988

R: 60, 61, 62

23. Să se afle toate numerele naturale mai mici decît 2 000 care, împărțite cu 24, 30, 18 dau toate restul 7.

Olimpia Brînză — G.M. nr. 1/1979

R: 727; 1 447

24. Găsiți toate numerele naturale cu proprietatea că împărțind pe 80, 134 și 152 la fiecare din ele, obținem totdeauna același rest diferit de zero.

Nicolae Cocoș — G.M. nr. 3/1980

Soluție: Fie a numărul căutat, atunci:

$80 = ac_1 + r$; $134 = ac_2 + r$; $152 = ac_3 + r$ sau

$18 = a(c_3 - c_2)$; $54 = a(c_2 - c_1)$; $72 = a(c_3 - c_1)$ sau

$2 \cdot 3^2 = a(c_3 - c_2)$; $2 \cdot 3^3 = a(c_2 - c_1)$; $72 = a(c_3 - c_1)$

R: $a = \{3, 6, 9\}$. Mai pot fi și alte valori?

25. Să se afle numărul n știind că dacă împărțim la acesta numerele 16 958 și 62 280 obținem resturile 32 și, respectiv, 1.

Ștefanache Smarandache — G.M. nr. 2—3/1982

R: $n = 217$

26. Împărțind 2 414 și 1 856 prin același număr natural obținem resturile 17 și, respectiv, 23. Să se afle numărul prin care ele au fost împărțite.

Gh. Ghinea — G. M. nr. 1/1982

R: 47

27. Să se afle suma tuturor resturilor împărțirilor numerelor de cîte 4 cifre prin 1 000.

C. Ionescu Tiu — G.M. nr. 9/1984

Soluție: Numerele cuprinse între 1 000 și 1 999, împărțite la 1 000, dau resturile 0, 1, 2, 3, ..., 999. Analog, numerele cuprinse între 2 000 și 2 999, împărțite la 1 000 dau resturile 0, 1, 2, 3, ..., 999 ș.a.m.d. numerele cuprinse între 9 000 și 9 999, împărțite la 1 000 dau resturile 0, 1, 2, 3, ..., 999.

Suma tuturor resturilor va fi: $S = 9(0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 999)$. Se cunoaște că $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$, atunci $S = 9 \cdot \frac{(1 + 999) \cdot 999}{2}$ sau $S = 4\,500 \cdot 999$.

28. Să se determine numerele naturale de forma $\overline{xxy1}$, scrise în baza 10, care, împărțite la un număr de două cifre, dau restul 98.

Iulian Stănică — G. M. nr. 7/1986

Soluție: Dacă restul este 98, iar împărțitorul are două cifre, rezultă că el este 99. Dacă din deîmpărțitul $\overline{xxy1}$ scadem restul 98, atunci se obține un număr ce se termină prin cifra 3.

Deci, avem: $99 \cdot 77 = 7\,623$; $7\,623 + 98 = 7\,721$; $\overline{xxy1} = 7\,721$.

29. Să se determine numerele de forma $\overline{17xy}$ care, împărțite la 9, dau restul 6, iar x și y sînt cifre, cele mai mari posibile.

Ilie Bălășan — G.M. nr. 12/1982

Soluție: $\overline{17xy} = 9 \cdot c + 6$ sau $\overline{17xy} - 6 = M9$ sau $1 + 7 + x + y - 6 = M9$ sau $2 + x + y = M9$. Cum x și y trebuie să fie maxime, luăm $x = 9$ și $y = 7$, respectiv $x = 7$ și $y = 9$. Dacă $x \neq y$, putem lua $x = y = 8$?

R: 1 797; 1 779

30. Să se determine numărul de trei cifre distincte și nenule $\overline{abc}$, scris în baza zece, care împărțit prin răsturnatul său $\overline{cba}$ dă

cîtul 6 și restul 97.

Dragomir Costea — G.M. nr. 9/1980
R : 961

31. Să se determine cel mai mic număr natural care împărțit, pe rînd, la 169 și la 18 să dea același rest 11 și cîtul diferit de zero.

Mihai Armanu — G.M. nr. 7—8/1987
R : 180

32. Să se determine toate perechile de numere naturale (m; n) astfel încît m + n = 60 și pentru care cîtul împărțirii cu rest a lui m și n este 8.

D. Munteanu — G.M. nr. 11/1979
R : (45; 15); (46; 14); (47; 18)

33. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza 10, știind că sînt divizibile prin $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Daniel Cojocaru — G. M. nr. 9/1985

Soluție :

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & ab = 1 \\ \overline{ab} & \\ \hline \overline{cd} & \end{array}$$

Pentru ca împărțirea să fie fără rest, trebuie ca $\overline{cd} = 2 \cdot \overline{ab}$ sau $\overline{cd} = 3 \cdot \overline{ab}$ sau $\overline{cd} = 4 \cdot \overline{ab}$, ... $\overline{cd} = 8 \cdot \overline{ab}$. De exemplu : dacă $\overline{cd} = 2 \cdot \overline{ab}$, avem numerele 1 326; 3 162; 2 346; 3 264 ș.a.m.d.

Găsiți toate numerele.

34. Un număr natural a se divide cu numărul natural b, cîtul împărțirii fiind 267. Un elev, transcriind greșit, modifică cifra zecilor deîmpărțitului, scriind, în loc de cifra 0, cifra 6. Numărul astfel se divide cu b, dînd cîtul 272. Să se afle numerele a și b.

Victoria Ani și Ion Ani — G.M. nr. 8/1986

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Cîtul se modifică cu 272 — 267 = 5, iar deîmpărțitul se modifică cu 60, deci împărțitorul este 60 : 5 = 12; adică b = 12, a = 8 204.

35. Să se arate că nu există perechi (a, b) de numere naturale încît unul să fie cîtul dintre suma și produsul numerelor a și b, iar celălalt să fie cîtul dintre diferența și produsul numerelor a și b (a b, b(≠ 0).

Ștefan Tifui — G. M. nr. 2/1983

Soluție:

I) $a = \frac{a+b}{ab}$ și $b = \frac{a-b}{ab}$ sau $ab = \frac{a+b}{a}$ și $ab = \frac{a-b}{a}$, de unde $\frac{a+b}{a} = \frac{a-b}{b}$; se ajunge la a — — b = b $\sqrt{2}$ imposibil. (1),

II) $a = \frac{a-b}{ab}$ și $b = \frac{a+b}{ab}$, se ajunge la $a^2 =$ (2), = — b^2 imposibil.

36. Fie a și b două numere întregi. Se notează cu q și r cîtul, respectiv restul împărțirii lui a la b. Dacă b este impar, b și r sînt numere prime între ele, iar restul împărțirii lui a^2 la b^2 este r^2, atunci numărul q este divizibil cu b.

I. Voicu — G.M. nr. 10/1977

Soluție:

(1) $a = bq + r$; b impar; (b, r) = 1
(2) $a^2 = b^2q_1 + r^2$. Înlocuind (1) în (2), obținem : $q(bq + 2r) = bq_1$, q este divizibil cu b.

37. Fie un număr format numai din cifra 7, care se împarte exact la 199. Să se afle ultimele 4 cifre ale cîtului.

Matematică distractivă, Anglia, 1936
din G.M. nr. 12/1978
R : 199 × ... 6 823 = ... 777 ; n =
= ... 6 823

38. Să se determine cifrele a, b, c, d în baza 10 astfel încît $\overline{abcdba} : \overline{abc} = \overline{cbba}$.

C. Iancu — G.M. nr. 7/1980

Soluție :

$$\begin{array}{l} \overline{abcdba} : \overline{abc} = \overline{100a} \\ \underline{\overline{abc}} \\ \quad \overline{dba} \end{array}$$

deci, $c = 1$ și $b = 0$, $a^2 = d$. Cum $a \in \{1, 2, 3\}$, rezultă $d = a^2 \in \{1, 4, 6\}$.

O soluție va fi : $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 4$

$201\ 402 : 201 = 1\ 002$

Găsiți și a doua soluție.

39. Înlocuiți steluțele cu cifre corespunzătoare :

a)
$$\begin{array}{r} \sqrt{****} \\ * \\ \hline 1** \\ *** \\ \hline === \end{array} \qquad \begin{array}{r} ** \\ \hline ** \cdot * \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \sqrt{****} \\ * \\ \hline 2** \\ *** \\ \hline === \end{array} \qquad \begin{array}{r} ** \\ \hline ** \cdot * \end{array}$$

Arătați că pentru exercițiul a) se pot găsi două soluții, iar pentru b) numai una singură.

Ion Loșchi — G.M. nr. 4/1979

Soluție :

a)
$$\begin{array}{r} \sqrt{1\ 089} \\ 9 \\ \hline 189 \\ 189 \\ \hline === \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ \hline 63 \cdot 3 = 189 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \sqrt{1\ 156} \\ 9 \\ \hline 256 \\ 256 \\ \hline === \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ \hline 64 \cdot 4 = 256 \end{array}$$

Găsiți a doua soluție pentru a).

40. Să se determine numerele de forma $\overline{abcdef}$, scrise în baza 10, cu cifre nu neapărat distincte, știind că verifică egali-

tatea : $\overline{abcdef} = 3 \cdot \overline{abc} \cdot \overline{def}$.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 9/1985

Soluție :

$$\overline{abcdef} : \overline{abc} = \overline{100\times}$$
$$\overline{abc}$$
$$===\overline{def}$$

În locul steluței trebuie să punem o cifră astfel ca numărul $\overline{100\times}$ să fie divizibil prin 3. Dacă în locul steluței punem cifra 2, atunci împărțirea devine :

$$\overline{abcdef} : \overline{abc} = 1\,002$$
$$\overline{abc}$$
$$===\overline{def}$$
$$\overline{def}$$
$$===$$

Deci, $\overline{def} = 2 \cdot \overline{abc}$.

$1\,002 = 3 \cdot 334$, deci $\overline{def} = 334$ și $\overline{abc} = 167$

Numărul căutat este 167 334.

Verificare : $167\,334 = 3 \cdot 167 \cdot 334$

Mai sînt și alte soluții ?

41. Care sînt cîtul și restul împărțirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots 15 + 200$ la numărul 182 ?

Concurs Suceava — G.M. nr. 3/1988

Soluție :

$$\frac{N}{182} = \frac{N}{2 \cdot 7 \cdot 13} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots 6 \cdot 7 \cdot 8 \ldots 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 + 182 + 18}{2 \cdot 7 \cdot 13} =$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 + 1 + \frac{18}{182}$$

Cîtul $= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 + 1$ Restul $= 18$

42. Aflați cîtul și restul împărțirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots 25 + 250$ la $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 111$.

Ionel Atanasiu — G.M. nr. 4/1977

R: cîtul $= 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \ldots 25 + 1$; iar restul $= 19$

43. Cîte numere din mulțimea
$A = 1; 11; 111; 1111; \ldots; \underbrace{11 \ldots 11}_{\text{de 1977 ori}}$
se împart exact la 7?

Matematica v școle nr. 4/1977 — G.M. nr. 5/1979

Soluție: Primul număr care se împarte exact la 7 este numărul 111111, format din 6 cifre de 1, adică $111\,111 = 7 \cdot 15\,873$.

Următorul număr divizibil cu 7 va avea 12 cifre de 1. Deci, numerele divizibile cu 7 sînt cele care au cifra 1 de: 6; 12; 18; 24; ... ori.

Cum $1\,977 : 6 = 329$ (rest 3), rezultă că 329 de numere din mulțimea A sînt divizibile cu 7.

44. Calculați numărul:

$$(1\,984 \cdot 1\,983 - 2 - 4 - 6 - \ldots - 3\,964 - 3\,966) : 2.$$

Nicolae Ivășchescu — G.M. nr. 5/1985

Soluție:

$$n = [1\,984 \cdot 1\,983 - 2 + 4 + 6 + \ldots + 3\,966] : 2$$

Dar $(2 + 4 + 6 + \ldots + 3\,966) = \dfrac{(2 + 3\,966) \cdot 1\,983}{2} =$

$= 1\,984 \cdot 1983$, atunci $n = (1\,984 \cdot 1\,983 - 1984 \cdot 1\,983) : 2 = 0 : 2 = 0$

Scanned with OKEN Scanner

E) PUTERI. PĂTRATE

1. Determinați cifrele a, b, c din egalitatea $\overline{ab}^2 + \overline{cc}^2 = \overline{ba}^2$.

Liviu Pîrșan — G.M. nr. 10/1987

Soluție : $9(b - a)(b + a) = 11c^2$; $c = 6$; $b = 6$, $a = 5$

2. Să se afle numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condițiile :

$$1)\ \overline{ab} = \overline{dc} + 1 \qquad 2)\ b^2 = \overline{cd}$$

Ion Morteanu — G.M. nr. 12/1981

R : 1 981 Mai sînt și alte numere?

3. Să se determine numerele naturale a, b, c, d știind că îndeplinesc condițiile :

$$(b^2 - a^2)(d^2 - c^2 - b^2) = 1\,981 \cdot a < b < c < d$$

Ștefan Marica — G.M. nr. 1/1981

Soluție : $(b^2 - a^2)(d^2 - c^2 - b^2) = 7 \cdot 283$; $b^2 - a^2 = 283$; $(b - a)(b + a) = 283 \cdot 1$; $b - a = 1$ și $b + a = 283$, deci $a = 141$ și $b = 142$. Atunci $d^2 - c^2 = 20\,171$, deci $c = 427$, $d = 450$.

4. Aflați toate numerele naturale a și b care satisfac egalitatea $a^2b - 3a^2 = 605$.

Constantin Coandă — G.M. nr. 11/1984

R : $a = 11$; $b = 8$

5. Să se determine numerele naturale consecutive a și b astfel încît : $\overline{(aa)}^2 + \overline{(ab)}^2 = \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 1\,981$.

Marius Dicu — G.M. nr. 11/1981

Soluție : $b = a + 1$; înlocuind în condiția problemei, avem : $(11a)^2 + (11a + 1)^2 - 11a(11a + 1) = 1\,981$ sau $a(11a + 1) = 4 \cdot 45$; $a = 4$; $b = 5$

6. Să se determine un număr $\overline{abc}$ știind că

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = (a + b + c)^2.$$

C.V. Costăchescu — G.M. nr. 10/1979
R : 245

7. Să se afle toate numerele m pentru care $m^2 = \overline{aab} + \overline{ab} + \overline{bc}$; știind că $b \neq 0$; $a \neq 0$; $c = 0$; iar $\overline{aab}$; $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$ sînt numere scrise în baza 10.

Manuela Tutunaru — G.M. nr. 2/1979
R : $12^2 = 112 + 12 + 20$
Mai sînt și alte soluții ?

8. Să se determine cifrele a; b astfel încît să avem : $\overline{(1a)}^2 = \overline{1bb}$ și $\overline{(a1)}^2 = \overline{bb1}$. Numerele sînt scrise în baza 10.

Francisc Csaki — G.M. nr. 5/1979
R : $(12)^2 = 144$ și $(41)^2 = 441$

9. Să se determine toate perechile de numere naturale m și n care verifică egalitatea $m^2(n + 1) = 800$.

Gh. Stoca — G.M. nr. 9/1979
R : (2 ; 199) ; (4 ; 49) ; (5 ; 31) ; (10 ; 7) ; (20 ; 1)

10. Să se afle numărul al cărui pătrat este mai mic cu 595 decît pătratul sumei dintre acel număr și 5.

Doru Săvulescu — G.M. nr. 1/1978
R : 57

11. a) Să se găsească numărul natural care să fie cu 1 332 mai mic decît pătratul său.

b) Găsiți 8 numere naturale consecutive al căror produs să fie 5 814.

St. Tifui — G.M. nr. 8/1979

R: a) 87 b) 17; 18; 19

12. Să se determine cifrele a; b, x; y; z știind că $\overline{aabb}$ — $-\overline{xzzy} + b + y = 1\,978$, unde $\overline{aabb}$ este un pătrat perfect, iar $\overline{xzzy}$ este pătratul lui $\overline{zy}$; x; y; z fiind numere consecutive ($x < y < z$).

P. Simion — G.M. nr. 5/1978

Soluție: Condiția problemei se scrie astfel: $\overline{aab0} + b - \overline{xzz0} - y + b + y = 1\,978$ sau $\overline{aab0} - \overline{xzz0} + 2b = 1\,978$ de unde deducem că $b = 4$. Condiția problemei se mai scrie $\overline{aa48} - \overline{xzz0} = 1\,978$.

Pentru a obține cifra zecilor de la diferență, trebuie ca $z = 7$. Condiția devine $\overline{aa48} - \overline{x770} = 1\,978$.

Pentru a obține cifra zecilor, 9, trebuie ca $a = 7$ și condiția devine $7748 - \overline{x770} = 1\,978$, deci $x = 5$.

Deci: $a = 7$; $b = 4$; $x = 5$, $y = 6$, $z = 7$ și $5 < 6 < 7$, $76^2 = 5\,776$, adică $y = 6$.

Verificare: $7\,744 - 5\,776 + 4 + 6 = 1\,978$

13. Să se determine toate numerele naturale nenule x, y, z care au proprietatea: $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Aurel Ene — G.M. nr. 12/1984

R: (1, 2, 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3, 1; 2); (3; 2; 1)

14. Să se arate că numărul $N = 561 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 560)$ este un pătrat perfect.

R. Cornea — G.M. nr. 1/1981

R: $N = 561^2$

15. Pătratul unui număr de două cifre este un număr de 3 cifre, iar pătratul răsturnatului numărului de două cifre este egal cu răsturnatul numărului de 3 cifre. Găsiți numerele de 3 cifre. Numerele sînt scrise în baza 10.

Gh. Moraru — G.M. nr. 9/1979

R: $12^2 = 144$ și $21^2 = 441$ Mai sînt și alte numere?

16. Pătratul unui număr natural N de două cifre, în baza 10, este de forma $N^2 = \overline{a(a+b)b}$, unde a, a + b, b sînt cifre, iar $a \neq 0$.

1) Arătați că a = b și că a este pătratul unui număr natural.

2) Găsiți toate numerele N cu proprietatea din enunț.

Adrian P. Ghioca — G.M. nr. 1/1978

Soluție: $N^2 = 100a + 10(a + b) + b = 11 \cdot \overline{ab}$. Pentru ca $11 \cdot \overline{ab}$ să fie pătrat perfect trebuie ca $\overline{ab} \in \{11, 4 \cdot 11\}$.

Dacă $\overline{ab} = 11$, avem $N^2 = 121$

Dacă $\overline{ab} = 44$, avem $N^2 = 484$

17. Numărul $\overline{abcd}$ este pătrat perfect. Știind că numerele $\overline{cd}$, $\overline{ab}$ sînt consecutive, determinați numărul $\overline{abcd}$. Numerele sînt scrise în baza zece.

Gh. Moraru — G.M. nr. 4/1979

R: 81; 82 și abcd = 8 281

18. Arătați că există 3 numere întregi consecutive astfel încît suma pătratelor lor este 1 877.

Florian Gagota — G.M. nr. 9/1981

R: 24, 25; 26

19. i) Să se determine numerele $\overline{ab}$ de două cifre, scrise în baza 10, care verifică simultan condițiile:

1) $\overline{ab}$ este un pătrat perfect și

2) $\overline{ab}$ se divide prin suma și prin produsul cifrelor sale.

ii) Să se rezolve o problemă analoagă pentru numerele $\overline{abc}$ de trei cifre.

Dumitru Acu — G.M. nr. 7/1982

R: i) 36; ii) 144

20) Să se determine numerele de forma $\overline{abcd}$, avînd cifrele distincte, știind că numerele $\overline{ad}$, $\overline{ca}$ și $\overline{abd}$ sînt pătrate perfecte.

Adrian Cîndrea — G.M. nr. 5/1986

R: 1986. Mai sînt și alte numere.

Scanned with OKEN Scanner

21. Să se determine elementele mulțimii $\{x, y, z\}$ astfel încît numerele $\overline{xyz}$, $\overline{xzy}$, $\overline{zyz}$ scrise în sistem zecimal să fie pătrate perfecte.

Tulba Vasile — G.M. nr. 12/1978

R: $\{1, 6, 9\}$

22. Să se afle cel mai mic număr care, înmulțit cu numărul 15 012, să dea un pătrat perfect.

Radu Cornea — G.M. nr. 10/1978

Soluție: $15\,012 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 139$. Deci, numărul dat trebuie înmulțit cu $3 \cdot 139$ pentru a obține $(4 \cdot 9 \cdot 139)^2$.

23. Să se determine un număr n astfel ca $7n + 1$ și $9n + 4$ să fie două pătrate perfecte consecutive.

V. Pătrașcu — G.M. nr. 2/1973

Soluție: $7n + 1 = k^2$ și $9n + 4 = (k + 1)^2$. Făcînd calculele, obținem $n^2 - 5n = 0$, de unde $n = 0$ și $n = 5$.

24. Să se determine numerele naturale scrise în bază 10 de forma $\overline{aba}$, care au proprietatea că $\overline{aba} + 1$ reprezintă pătratul unui număr natural.

E. Rogai — G.M. nr. 5/1979

Soluție: Pătratul unui număr se termină prin cifra 1, 4, 5, 6 sau 9. Avem $323 + 1 = 18^2$; $575 + 1 = 24^2$.

25. Să se determine toate numerele naturale scrise în baza 10 de forma $A = \overline{ab9c}$, pătrate perfecte.

Ilie Diaconu — G.M. nr. 8/1981

R: $1\,296 = 36^2$; $4\,096 = 64^2$; $7\,396 = 86^2$

26. Să se arate că numerele de forma $n^2 + (n - 1)^2 + (n^2 - n)^2$ sînt pătrate perfecte pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Bogdan Enăchescu — G.M. nr. 3/1981

R: $(n^2 - n + 1)^2$

Scanned with OKEN Scanner

27 Să se determine toate numerele de două cifre scrise în baza 10 pentru care suma dintre număr și răsturnatul său este pătrat perfect.

Gheorghe Jurj — G.M. nr. 5/1983

Soluție: $\overline{ab} + \overline{ba} = k^2$ sau $11(a + b) = k^2$, de unde $a + b = 11$. Se obțin mai multe variante.

28. Cîte numere naturale de 3 cifre sînt egale cu răsturnatul lor? Cîte din acestea sînt pătrate perfecte?

Tudor Băețica — G.M. nr. 2/1983

Soluție: $\overline{abc} = \overline{cba}$, rezultă $a = c$, iar $0 \leq b \leq 9$ $\overline{aba}$, $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$
$121 = 11^2$; $484 = 22^2$; $676 = 26^2$

29. Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$ știind că $a \cdot b = \overline{cd}$ și $\overline{dc}$ este pătrat perfect ($a < b$, $a \neq c$)

Iulian Mazilu — G.M. nr. 1/1985
R: 7 963

30 Să se arate că numărul $E = 99\underbrace{\ldots\ldots}_{n \text{ cifre}}900\underbrace{\ldots\ldots}_{n \text{ cifre}}25$.
unde n este un număr natural, este pătrat perfect.

G. Mărgineanu — G.M. nr. 10/1984
R: $95^2 = 9\,025$; $995^2 = 990\,025$; $9\,995^2 = 99\,900\,025$, generalizare.

31. Să se găsească toate numerele de forma $N = \overline{aabb}$ scrise în baza 10 care să fie pătrate perfecte.

C.C. Nistorescu — G.M. nr. 12/1977

Soluție: $N = 11 \cdot \overline{a0b}$. Deoarece N este pătrat perfect, rezultă că $\overline{a0b} = M \cdot 11$.
$\overline{a0b} = 11 \cdot 64 = 704$, deci $N = 11^2 \cdot 64 = 88^2 = 7\,744$

32. Să se determine numerele consecutive a, b, c ($a < b <$

< c) știind că $E = \overline{abc}\ (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$ este pătrat perfect.

Ștefan Marica — G.M. nr. 9—10/1982

Soluție: $b = a + 1$, $c = a + 2$; $E = 2(168a^3 + 89a^2 + 118a + 2)$. Pentru $a = 2$ avem E pătrat perfect, $b = 3$, $c = 4$.

33. Să se determine numerele $\overline{x}$ și $\overline{abcd}$ scrise în baza 10 știind că $(\overline{x} + 16)(\overline{x^2} - 16 \cdot \overline{x} + 256) = \overline{abcd}$, că $\overline{x}$ este pătrat perfect, iar $\overline{bc} = x^2$.

Sînziana Adangiu — G.M. nr. 1/1983

Soluție: Condiția problemei se mai scrie $\overline{x^3} + 4\,096 = \overline{abcd}$. Cum $\overline{x^2} = \overline{bc}$, rezultă $x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Deoarece x este și pătrat perfect, rezultă $\overline{x} = 4$, $\overline{bc} = 16$, $\overline{abcd} = 4\,160$.

34. Arătați că diferența dintre un număr de 3 cifre și răsturnatul său nu poate fi pătrat perfect.

Eugen Fila — G.M. nr. 10/1984

Soluție: $\overline{abc} - \overline{cba} = 9 \cdot 11 \cdot (a - c)$. Cum a și c sînt cifre, rezultă că a-c nu poate fi 11, deci diferența nu poate fi pătrat perfect.

35. Să se arate că numărul format din suma $S = p^2_1 + p^2_2 + \ldots + p^2_{10}$ nu este pătrat perfect, p_n fiind al n-lea număr prim.

T. Urtea — G.M. nr. 6/1977

Soluție: Numerele prime se termină prin una din cifrele 1, 3, 7, 9. Atunci pătratele lor se vor termina în cifrele 1 sau 9. Cum aceste cifre sînt impare, rezultă că suma a 10 numere care se termină prin cifre impare este un număr par, deci nu poate fi număr prim.

36. Să se arate că numărul $N = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 + \ldots$ nu este pătrat perfect, dacă numărul termenilor este mai mare ca 1.

Corneliu Rusu — G.M. nr. 11/1979

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Orice pătrat perfect se termină prin una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Dacă $N = 1 + 2 \cdot 3 = 7$, deci nu este pătrat perfect. Dar $4 \cdot 5 \cdot 6$ se termină prin zero, deci $N = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6$ se termină prin 7. Următorii termeni ai numărului N sînt astfel formați că vor conține ca factori pe 2 și 5, de se vor termina prin zero; deci, oricît am continua, N se termină prin 7; deci nu poate fi pătrat perfect.

37. Dacă un număr natural cu $n \geq 3$ cifre este pătrat perfect și are cifra unităților egală cu zero, atunci și cifra zecilor este egală cu zero.

Ion Voicu — G.M. nr. 12/1979

Soluție: $\overline{abc0} \cdot \overline{abc0} = \overline{...x00}$. Efectuați înmulțirea în scris.

38. Diferența pătratelor a două numere naturale consecutive este a^2. Demonstrați că a este număr întreg impar.

Laurențiu N. Gaiu — G.M. nr. 4/1978

Soluție: $(n + 1)^2 - n^2 = a^2$ sau $2n + 1 = a^2$. Cum $2n + 1$ este impar, rezultă și a^2 impar, deci a este impar.

39. Să se demonstreze că împărțind la 8 pătratul oricărui număr impar, obținem un rest egal cu unitatea.

Jülia Botár — G.M. nr. 8/1977

Soluție: Fie $2k + 1$ numărul impar. Dacă demonstrăm că pătratul unui număr impar micșorat cu o unitate este divizibil cu 8, atunci am demonstrat afirmația din problemă. Deci

$$\frac{(2k + 1)^2 - 1}{8} = \frac{4k(k + 1)}{8} = \frac{k(k + 1)}{2} \in \mathbb{N},$$

deoarece $n(n + 1)$ se divide prin 2.

40. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}$, dacă $x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 1\,463$.

Ana Dodea — G.M. nr. 7/1981

R: $x = 1$, $y = 7$, $z = 11$ și permutările lor

Scanned with OKEN Scanner

41. Să se afle x, y, z, t $\in N$, știind că este verificată egalitatea : $x^2(y+1)^2 \cdot (z+2) \cdot (t+3) = 1\,980$

R : $x = 2$; $y = 2$; $z = 3$; $t = 9$
$x = 3$; $y = 1$; $z = 3$; $t = 9$

Mai sînt și alte soluții ?

42. Să se determine cifrele a, b, c scrise în baza 10, știind că $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 655$ și că $\overline{bc}$ este pătratul lui c, iar $\overline{abc}$ este pătratul lui $\overline{bc}$

Francisc Csaki — G.M. nr. 8/1983

R : $a = 6$; $b = 2$; $c = 5$

Scanned with OKEN Scanner

F) CUBURI

1. Să se determine numărul de 3 cifre cu proprietatea că atît el cît și succesorul său sînt egale cu suma cuburilor cifrelor lor.

Dumitru Acu — G.M. nr. 12/1984

Soluție: $\overline{abc}$, succesorul $\overline{ab(c+1)}$. Condițiile din problemă se scriu astfel:

$100a + 10b + c = a^3 + b^3 + c^3$ (1)

$100a + 10b + c = a^3 + b^3 + c^3 + 3c^2 + 3c + 1$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $1 = 3c^2 + 3c + 1$, care se verifică pentru $c = 0$. Relația (1) devine $100a + 10b = a^3 + b^3$ sau $a(100 - a^2) = b(b^2 - 10)$, se verifică pentru $a = 3$, $b = 7$.

Numărul va fi 370. Verificați.

2. Să se demonstreze că suma cuburilor a 3 numere consecutive este totdeauna un multiplu de 3.

Gh. Ivașcu — G.M. nr. 11/1985

Soluție: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3(n^3 + 6n^2 + 5n + 3) = M \cdot 3$

3. Suma cifrelor unui număr format din 3 cifre este pătratul unui număr prim, iar produsul lor este cubul unui număr prim. Să se determine numerele cu aceste proprietăți.

Costel Chiteș — G.M. nr. 2/1983

R: 333. Mai sînt și alte numere?

4. Suma a două numere naturale este egală cu cubul primului număr.

a) Să se afle primul număr știind că al doilea este zero.

b) Să se arate că al doilea număr este divizibil cu 6.

N. Gross — G.M. nr. 8/1982

R: $(1 + 0) = 1^3$; $(3 + 24) = 3^3$

Scanned with OKEN Scanner

5. Să se determine numerele naturale de două cifre al căror cub are 6 cifre, cub care se scrie numai cu cifrele 6, 7, 8

D. Acu — G.M. nr. 7/1977

R : $92^3 = 778\,688$. Mai sînt și alte numere?

6. Se dă expresia :

$E(a,b) = 1\,000a^3 + 100a^2(3b + 1) + 10ab(3b + 2) + b^2(b + 1)$.

a) Să se arate că expresia $E(a,b)$ se poate scrie ca suma dintre cubul unui număr și pătratul aceluiași număr.

b) Să se determine perechile de cifre (a, b) astfel încît $E(a,b)$ să fie pătrat perfect.

Ion Neață — G.M. nr. 7/1988

Soluție : a) $E(a,b) = (10a)^3 + 3(10a)^2b + 3(10a)\overline{b^2} + \overline{b^3} + 100a^2 + 20ab + b^2 = (10a + b)^3 + (10a + b)^2 = \overline{ab}^3 + \overline{ab}^2$

b) $E(a,b) = (10a + b)^3 + (10a + b)^2 = (10a + b)^2 \cdot (10a + b + 1)$. Pentru ca $E(a,b)$ să fie pătrat perfect, trebuie ca $10a + b + 1$ să fie pătrat perfect.

Dacă $10a + b + 1 \in \{1, 4, 9\}$, rezultă $a = 0$, iar $b \in \{0, 3, 8\}$, adică avem perechile (0,0) ; (0,3) ; (0,8) ;.

Dacă $10a + b + 1 \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$, atunci avem perechile : (1,5) ; (2,4) ; (3,5) ; (4,8) ; (6,3) ; (8,0) și (9,9).

7. Se dă $E = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$. Să se afle a, b, c astfel încît :

a) E să fie un număr de 3 cifre ;

b) E să fie divizibil cu 37 ;

c) E să fie pătrat perfect ;

d) a, b, c — fiind cifre consecutive — să se afle acestea, astfel ca $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ să fie minimă? dar maximă?

Numerele sînt scrise în baza zece.

Gh. Minică — G.M. nr. 2/1981

Soluție : a) $E = 222(a + b + c)$. Ca E să fie din 3 cifre, trebuie ca : $a + b + c = 1$; $a + b + c = 2$; $a + b + c = 3$; $a + b + c = 4$.

Analizați cazurile cînd $a = b = c$ sau $a = b \neq c$, sau $a \neq b \neq c$.

b) $E = 222(a + b + c) = 2 \cdot 3 \cdot 37(a + b + c) = M\ 37$

c) $a + b + c = 222$, imposibil

Scanned with OKEN Scanner

d) $a = 1$, $b = 2$; $c = 8$; $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$, deci $a \neq b \neq c$.

8. Să se determine numerele naturale cuburi perfecte cu proprietatea că dacă le suprimăm prima și ultima cifră pătratul numărului rămas se scrie numai cu cifre impare.

D.M. Bătineţiu — G.M. nr. 12/1979

Soluție: După înlăturarea primei și a ultimei cifre trebuie să rămînă 1 sau 8; deoarece sînt singurele numere al căror pătrat nu conține cifre pare. Atunci $216 = 6^3$ și $1^2 = 1$; $512 = 8^3$ și $1^2 = 1$.

9. Să se afle numărul despre care știm că dublul cubului unei treimi din el este cu 88 mai mic decît cubul jumătății lui.

Doru Săvulescu — G.M. nr. 6/1979
R: 12

10. Să se determine numărul $N = \overline{abcd}$ știind că îndeplinește simultan următoarele condiții:

1) $a + b + c + d = \overline{ad}$;
2) $a + d = b + c$;
8) $\overline{abcd}$ este un cub perfect.

D. Măiereanu — G.M. nr. 8/1986
R: N = 1 728

11. Să se găsească perechea de numere naturale consecutive astfel încît cubul primului număr și pătratul celui de-al doilea număr să fie tot numere consecutive.

Vasile Alba — G.M. nr. 7/1986
R: (2,3)

12. Determinați cifra x astfel încît numărul $\overline{19 \times 83}$ să fie cubul unui număr natural.

Kvant nr. 11/1985 — G.M. nr. 3/1986

Soluție: $\overline{(ab)}^3 = \overline{19 \times 83}$. Numai cubul lui 7 se termină prin 3, deci $b = 7$. Se observă că: $17^3 < \overline{19 \times 83} < 37^3$, deci $27^3 = 19\,683$, $x = 6$

13. Fie $M = \overline{ab}$ și $p = \overline{cd}$ două numere naturale, de cîte două cifre, scrise în baza 10. Să se determine aceste numere știind că $m^2 = p^3$.

Adrian P. Ghioca — G.M. nr. 12/1978

R: $m = 64$; $p = 16$

14. Aflați cel mai mic număr natural în baza 10 de forma $\overline{abcd}$, știind că sînt îndeplinite următoarele condiții, simultan: 1) $b^4 = \overline{ca}^2$; 2) $b \cdot d = \overline{ac}$; 3) $a + c = b$.

Luminița Ignat — G.M. nr. 1/1982

$\overline{abcd} = 1\,982$

15. Să se demonstreze că suma cuburilor a 5 numere naturale consecutive se divide cu 5.

* * * — G.M. nr. 1/1978

Soluție: $n = \{M5, M5+1, M5-1, M5+2, M5-2\}$

$S = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + (n+4)^3$ sau

$S = (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 + n + 2)^3$.

G) PUTERI

1. Se dă numărul $E_1 = 2^7 - 2^6 - 2$.

a) Să se găsească acest număr ca o sumă de puteri naturale consecutive ale lui 2.

b) Se cere același lucru și pentru $E_2 = 2^n - 2^{n-1} - 2$; unde $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 3$.

L. Mănescu — G.M. nr. 2/1982

Soluție: a) $E_1 = 2^7 - 2^6 - 2 = 2^6(2-1) - 2 = 2^6 - 2 = 2(2^5 - 1)$.

Utilizăm formula:

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

$E_1 = 2(2^5 - 1^5) = 2(2 - 1)(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$.

b) $E_2 = 2^{n-1}(2 - 1) - 2 = 2^{n-1} - 2 = 2(2^{n-2} - 1) = 2(2^{n-2} - 1^{n-2}) = 2(2 - 1)(2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2^1 + 2^0) = 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2$.

2. Se dau numerele:

$M = 2^{20} - 2^{19} + 2^{18} - 2^{17} + 2^{15} - 2^{14} + 2^{13} - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0$

$N = [(991^2 - 2 \cdot 991 + 1) : 990 + 1] \cdot 2 - 2(2^6 + 2^5 - 2^2 - 2^0)$

$P = 2^{11} + 2^{10} - 2^8 + 2^7 + 2^6 - 2^4 + 2^3 + 2 - 2^0$

a) Să se descompună în factori primi numerele date.

b) Să se arate că $8M - NP = 0$.

Ion Zaharia — G.M. nr. 11/1982

Soluție: a) Pentru aflarea numerelor M și P se grupează convenabil termenii doi cîte doi.

Pentru aflarea lui N se aplică formula

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

3. Să se calculeze:

$E = 9^8 - 8 \cdot 9^7 - 8 \cdot 9^6 - 8 \cdot 9^5 - 8 \cdot 9^4 - 8 \cdot 9^3 - 8 \cdot 9^2 - 8 \cdot 9 - 1$

I. Trifan — G.M. nr. 4/1978

R i 8

4. Să se afle $n \in \mathbb{N}$, astfel încît să existe egalitatea: $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \ldots 2^n - (16^{631})^2 = 3 \cdot 4^{2524}$

Stela Tomulescu — G.M. nr. 8/1981

Soluție: Egalitatea se mai scrie astfel:

$2^{1+2+3+\ldots+n} - 2^{8 \cdot 631} = 3 \cdot 2^{2 \cdot 2524}$ sau $2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{5050}$, de unde $n = 100$.

5. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției $b > a$, unde $a = (27^{31} - 2 \cdot 9^{46} + 4^{102} : 2^{203} - 3^{92})^{213}$, iar $b = (-3)^{142}$.

Ilie Florescu — G.M. nr. 3/1980

Soluție: $a = (3^{3 \cdot 31} - 2 \cdot 3^{2 \cdot 46} + 2^{204} : 2^{203} - 3^{92})^{213} = (3^{93} - 3 \cdot 3^{92} + 2)^{213} = 2^{213} = 8^{71}$; $b = (-3)^{142} = 3^{2 \cdot 71} = 9^{71}$, deci, $b > a$ este adevărată.

6. Fie numărul $A = 2(4 \cdot 27^{4n} \cdot 125^{3n} + 27 \cdot 3^{4n} \cdot 4^{5n} \cdot 5^{3n}) - 3(12 \cdot 9^{4n} \cdot 2^{5n} \cdot 125^{2n} + 9 \cdot 8^{5n})$

Să se arate că numărul A este cub perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

N.N. Dobrinescu — G.M. nr. 8/1979

Soluție: $A = 2^3 \cdot 3^{12n} \cdot 5^{9n} + 3^3 \cdot 2 \cdot 2^{10n} \cdot 5^{3n} - 3^2 \cdot 3^{8n} \cdot 2^2 \cdot 2^{5n} \cdot 5^{6n} - 3^3 \cdot 2^{15n} = (2 \cdot 3^{4n} \cdot 5^{3n})^3 - 3(2 \cdot 3^{4n} \cdot 5^{3n})^2 \cdot (3 \cdot 2^{5n}) + 3(2 \cdot 3^{4n} \cdot 5^{3n}) \cdot (3 \cdot 2^{5n})^2 - (3 \cdot 2^{5n})^3 = (2 \cdot 3^{4n} \cdot 5^{3n} - 3 \cdot 2^{5n})^3$

7. Să se arate că: $40(41^{99} + 41^{98} + 41^{97} + \ldots + 41^2) + 1681 = 1681^{50}$

Vasile Serdean — G.M. nr. 11—12/1986

Soluție: Vezi indicația la ex. 1.

Scanned with OKEN Scanner

$a^{n+1} - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + \ldots + 1)$, de unde

$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, atunci avem:

$$40 \cdot 41^2 \cdot \frac{(41^{98}-1)}{41-1} + 41^2 = 41^2(41^{98} - 1 + 1) = = 41^{100}$$

8. Să se arate că $1\,985^{4n} + 1\,985^{2n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, este un număr compus.

Dumitru Ștefan — G.M. nr. 4/1985

Soluție: Se cunoaște că $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$, deci $(1985^n)^4 + (1985^n)^2 + 1 = [(1985^n)^2 + 1985^n + 1] \cdot [(1985^n)^2 - 1985^n + 1]$.

9. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $a - b = 1$, să se calculeze $E\ a^n - a^{n-1} \cdot b - a^{n-2} \cdot b - \ldots - ab - 1$.

R. Ghenghiu — G.M. nr. 1/1980

Soluție: $E = (a^n - 1) - b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a) - b + 4\,b = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)(a - b - 1) + b = 0 + b = b$.

10. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numărul $N = 3^{2n+2} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$ este un pătrat perfect.

Sermin Pîrnac — G.M. nr. 9/1986

R: $N = (12^{n+1})^2$

11. Comparați numerele A și B, dacă

$$A = a^{(1-\sqrt{3})^2} \qquad B = \left(\frac{a^2}{a\sqrt{3}}\right)^2, \text{ unde } a \in \mathbb{R}^*_+$$

Manuela Constantin — G.M. nr. 6/1985

R: $A = B$

12. Să se afle cifrele a, b, c, d astfel încît să avem egalitatea $a^{10} + a \cdot bcd = 1\,982$.

Vasile Pasenciuc — G.M. nr. 7/1982

Scanned with OKEN Scanner

Soluție : $a(a^3 + \overline{bcd}) = 2 \cdot 991$
$a = 2$; $b = 4$; $c = 7$; $d = 9$

13. Să se determine cifrele a, b, c, x astfel încît să avem :

$$a^2 \cdot \frac{\overline{5b2c7}}{11} = \overline{(a^a)(a^2)67} + \overline{(cc)}^{22} \cdot c^2; b, c \neq \{2, 5, 7\}.$$

Andrei Boroș — G.M. nr. 3/1983

Soluție : $\overline{5b2c7} = 50207 + b0c0$; 50 207 : 11 = 4 564 (rest 8) Deci, trebuie găsit un număr mai mare decît 4 564 care, înmulțit cu 11, să se termine cu 7. Avem 4 567. 11 = 50 237, atunci b = 0, c = 8. Egalitatea devine :

$a^2 \cdot 4\,467 = 1\,000 \cdot a + 121 \cdot c^4 + 67$.

Dacă c = 8, avem $a^2 \cdot 4\,467 = 1\,000 \cdot a^a + 9\,868$

Trebuie găsit a, astfel ca $a^2 \cdot 4\,467$ să se termine cu 8 ș.a.m.d.

R : a = 2; b = 0; c = 8; x = 8

14. Să se determine numerele naturale m și n, știind că $8 \cdot 2^m = 2^n - 1$.

Ion Miu — G.M. nr. 12/1984

R : m = 0; n = 2

15. Fie numărul $m = a^a + c^b - d$, unde a, b, c, d sînt numere naturale consecutive și $a < b < c < d$. Să se determine a, b, c, d știind că m este divizibil cu b, iar a este număr prim.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 7/1981

R : a = 2; b = 3; c = 4; d = 5; m = 63

16. Să se determine toate numerele de 5 cifre $\overline{abcxy}$, în baza 10, astfel ca $\overline{abc} = m^n$ și $\overline{xy} = n^m$.

Florin Cîrjan — G.M. nr. 10/1986

R : 51 281; 25 664; 12 849

17. Determinați numerele naturale care verifică egalitatea $\overline{(aba)}^3 = \overline{abcbcba}$, în sistemul zecimal.

Aurel Doboșan — G.M. nr. 9/1987

R : a = 1; b = 0; c = 3; $(101)^3 = 1\,030\,301$

Scanned with OKEN Scanner

18. Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ și $x = (-126)^{123} \cdot m^{n+2} \cdot n^5 \cdot p^{2n+1}$; $y = (-848)^{848} \cdot m^n \cdot n^3 \cdot p^{2n}$ Dacă x și y au semne diferite, atunci să se precizeze semnul numărului p.

Vasile Toniță — G.M. nr. 6/1980

Soluție: $x = -126^{123} \cdot m^n \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot n^2 \cdot p^{2n} \cdot p$ și $y = 848^{848} \cdot m^n \cdot n^3 \cdot p^{2n}$; iar $m^2 > 0$; $n^2 > 0$; rezultă că $p > 0$

19. Să se determine x, y și z numere naturale nenule care verifică egalitatea

$$x^{y^z} = 8.$$

C. Chihai — G.M. nr. 4/1977

R: $x = 8$; $x = 1$; $z = 1$; $x = 2$, $y = 6$; $z = 1$

20. Să se determine cifrele x, y astfel încît:

$$2^x \cdot 6^y \cdot 7^z = \overline{xx6y}$$

Domnica Preoteasa — G.M. nr. 12/1982

Soluție: $\overline{xx6y}$ se divide prin 2, deci $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ și este divizibil prin 6, deci $2x + y + 6$ este multiplu de 8. Se obține: $x = 1$; $y = 4$.

21. Să se afle numerele naturale x și y diferite între ele, $y > x$ și $x > 1$, pentru care să fie adevărată relația $x^y = y^x$.

Simion Limberea — G.M. nr. 9—10/1982

R: $x = 2$, $y = 4$

22. Să se afle x și y numere naturale astfel încît să avem $x \cdot y^x + 91 \cdot x = 1\,982$

Vasile Pasenciuc — G.M. nr. 7/1982

Soluție: $x(y^x + 91) = 2 \cdot 991$, de unde $x = 2$, deci $y^x = 900$, $y = 30$

23. Să se determine tripletele (x, y, z) de numere naturale consecutive pentru care are loc egalitatea $x^{y^3} = z^{2y}$.

Dragomir Costea — G.M. nr. 4/1982

R: (2, 3, 4) Găsiți și altă soluție.

24. Să se determine x, y și z numere naturale nenule care verifică egalitatea

$$x^y = 8$$

C. Chihai — G.M. nr. 4/1977

R: $x = 2;\ y = 3;\ z = 1$
$x = 8;\ y = 1;\ z \in \{1; 2; 3; \ldots\}$

25. Să se determine y, în sistemul zecimal, astfel încît $2^5 \cdot 9^y = \overline{259y}$.

Marin Ciobanu — G.M. nr. 9/1981

R: $y = 2$

26. Să se determine $x, y, z \in |N$, astfel încît

$$x^{yz} \cdot y^{zx} \cdot z^{xy} = 5 \cdot x \cdot y \cdot z$$

știind că x, y, z sînt numere naturale nenule.

Bogdan Berliba — G.M. nr. 11/12/1987

R: $x = 5,\ y = 2,\ z = 1$

27. Să se determine perechea (x, y), $x, y \in |N$, dacă $x^y - 6x = 1\,000$

R: $x = 4$; $y = 5$; deci $(4,5)$

28. Să se găsească numărul natural care, ridicat la puterea a cincea, devine 90 224 199.

Toader și Traian Dogaru — G.M. nr. 9/1978

R: $89^5 = 90\,224\,199$

29. Să se determine ultima cifră a numerelor din șirul lui Fermat:

$$F_n = 2^{2^n} + 1;\ n \in |N$$

Fl. Smarandache — G.M. nr. 12/1980

Soluție: Pentru $n = 0,\ F_0 = 3$
$n = 1,\ F_1 = 5$
$n = 2,\ F_2 = 17$

Se observă că pentru $n \geq 2$, expresia 2^{2^n} se termină cu 6, deci F_n se termină cu 7.

30. Cînd n^n are n cifre?

I. Ionescu — C.d.P

Soluție: Pentru $n = 1$, avem $1^1 = 1$

În general trebuie să avem: $10^{n-1} \leq n^n \leq 10^n$, deci $n < 10$. Apoi $n^{n-1} \cdot n \geq 10^{n-1}$ sau $n^{n-1} \cdot n \geq 5^{n-1} \cdot 2^{n-1}$, deci $n > 5$.

Pentru $n = 6$ și $n = 7$ nu verifică. Atunci $8^8 = 16\,777\,217$ și $9^9 = 387\,420\,489$

H) ULTIMA CIFRĂ A UNEI EXPRESII NUMERICE

1. Numerele telefoanelor din București sînt cuprinse între 100 000 și 999 999. Se cere:

a) La cîte telefoane numărul începe cu 1984?

b) La cîte telefoane numărul se termină cu 1984?

c) La cîte telefoane numărul este de forma $\overline{x1984x}$?

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 8/1984

R: a) la 100 telefoane; b) la 89 telefoane; c) la 9 telefoane

2. Determinați ultima cifră a numărului

$A = 142^1 + 142^2 + 142^3 + ... + 142^{20}$

x x x — G.M. nr. 2/1988

Soluție:

142^1 se termină prin cifra 2
142^2 se termină prin cifra 4
142^3 se termină prin cifra 8
142^4 se termină prin cifra 6
142^5 se termină prin cifra 2
142^6 se termină prin cifra 4
142^7 se termină prin cifra 8
142^8 se termină prin cifra 6
142^9 se termină prin cifra 2 ș. a. m. d.

Generalizînd, vom avea:

142^{M4+1} se termină prin cifra 2
142^{M4+2} se termină prin cifra 4
142^{M4+3} se termină prin cifra 8
142^{M4} se termină prin cifra 6

Această tehnică de aflare a ultimei cifre într-o putere se va mai aplica în multe exerciții. Deci, numărul A poate fi scris altfel pentru a pune în evidență ultima cifră dintr-o sumă de mai mulți termeni.

$A = (142^1 + 142^2 + 142^3 + 142^4) + (142^5 + 142^6 + 142^7 + 142^8) + ... + (142^{17} + 142^{18} + 142^{19} + 142^{20})$

Suma termenilor din fiecare paranteză va da cîte un număr ce se termină prin cifra zero. Deci A se termină prin cifra 0.

3. Să se afle ultima cifră a numărului
$a = 111^{111} + 222^{222} + \ldots + 999^{999}$

Constantin Nistorescu — G.M. nr. 8/1980

Soluție : 111^{111} are ultima cifră 1
222^{222} are ultima cifră 4
333^{333} are ultima cifră 3
444^{444} are ultima cifră 6
555^{555} are ultima cifră 5
666^{666} are ultima cifră 6
777^{777} are ultima cifră 7
888^{888} are ultima cifră 6
999^{999} are ultima cifră 9
Ultima cifră a numărului a este 7.

4. Se dă numărul
$A = 1^{1985} + 9^{1986} + 8^{1987} + 8^{1988}$
Este adevărată propoziția „A se divide cu 10?"

Mihai Contanu — G.M. nr. 1/1988
R: Da.

5. Să se afle ultima cifră a sumei
$S = 1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \ldots + 10^{10} + \ldots + 20^{20}$.

Cosmin Buzea — G.M. nr. 9/1983
R: Ultima cifră a lui S este 4.

6. Să se determine ultima cifră a numărului
$2^{1987} - 6^{1985} \cdot 5^{1980} \cdot 11^{1986}$

Iuliana Login — G.M. nr. 8/1986
R: 8

7. Să se determine cu ce cifră se poate termina numărul $7 \cdot n^4 - 16$, unde $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Constantin Coandă — G.M. nr. 7/1983
R: 1; 4; 6; 9

8. Fie numerele: $a = 8 + 8^2 + 8^3 + \ldots + 8^{1981}$ și $b = 9 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^{1981}$.
Să se afle cifra unităților numerelor $a + b$ și $a \cdot b$.

Vasile Scurtu — G.M. nr. 1/1983

Soluție: Se va proceda ca la exercițiul 2.
a are cifra unităților egală cu 8
b are cifra unităților egală cu 9
$a + b$ are cifra unităților egală cu 7
$a \cdot b$ are cifra unităților egală cu 2

9. Să se determine ultima cifră a numărului
$A = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n$, unde $n \in \mathbb{N}$

L. Mic — G.M. nr. 7/1977

Soluție: Față de numărul 4, n se va scrie $n = M4$; $n = M4 + 1$; $n = M4 + 2$; $n = M4 + 3$
1) Dacă $n = M4$, atunci $A = 1^{4M} + 2^{4M} + 3^{4M} + \ldots + 9^{4M}$.
Adunînd ultimele cifre, avem:
$1 + 6 + 1 + 6 + 5 + 6 + 1 + 6 + 1 = 33$, deci A se va termina prin cifra 3.
2) Dacă $n = M4 + 1$, adunînd ultimele cifre, avem:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
Dacă $n = M4 + 2$, adunînd ultimele cifre, avem:
$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 = 45$
Dacă $n = M4 + 3$, adunînd ultimele cifre, avem:
$1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 = 45$
În aceste cazuri A se va termina prin cifra 5.
3) Dacă $n = 0$, A se va termina prin 9.

10. Care dintre numerele A și B este mai mare?

$$A = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} \qquad B = 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$$

unde A conține $n + 1$ cifre de 2 și B conține n cifre de 3.

Dan Martinov — G.M. nr. 1/1982

Soluție: A și B se pot scrie astfel:

$A = 2^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$, unde A conține (n — 2) cifre de 2

$B = 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$, unde B conține (n — 2) cifre de 3.

Deci, $B > A$.

11. Să se afle ultima cifră a numărului

$$a = 1981^{1982} + 1983^{1984} + \ldots + 1999^{2000}.$$

Damian Marinescu — G.M. nr. 5—4/1984

R i 4

12. Să se determine ultima cifră a numărului

$$M = 3^{1980} + 4^{1982} + 5^{1984} + 6^{1986} + 7^{1988} + 8^{1990}$$

Andrei Boroș — G.M. nr. 8/1984

R i 9

13. Să se determine ultima cifră a numărului

$$A = 1987^{1987} + 1987^{1988} + 1987^{1989} + 1987^{1990}.$$

Bogdan Stanciu — G.M. nr. 4/1988

R i 0

14. Să se determine ultima cifră a numărului

$$N = 1^{1989} + 2^{1989} + 3^{1989} + 4^{1989} + 5^{1989} + 6^{1989} + 7^{1989} + 8^{1989} + 9^{1989}.$$

Petre Țelinoiu

R i 5

15. Să se afle ultima cifră a diferenței

$$\{[(1978^{87^{91}})^{1978}]^{87^{91}}\}^{1978} - \{[(1977^{77^{91}})^{1977}]^{77^{91}}\}^{1977}$$

I. Albescu — G.M. nr. 10/1978

Soluție: Descăzutul se termină cu 6; scăzătorul cu 7; iar diferența cu 9.

16. Să se arate fără a efectua calculele că numărul

$E = 1970 + 1971^1 + 1972^2 + 1973^3 + 1974^4 + 1975^5 + 1976^6 + 1977^7$ nu poate fi un pătrat perfect.

Gh. Lișcă — G.M. nr. 7/1977

Soluție: Deoarece E se termină prin cifra 2, rezultă că nu poate fi pătrat perfect. Pătratele perfecte se termină prin 0; 1; 4; 5; 6; 9.

17. Să se afle restul împărțirii numărului S la 7; unde $S = 1^{1987} + 2^{1987} + 3^{1987} + 4^{1987} + 5^{1987} + 6^{1987} + 7^{1987}$

D. Masealiuc — G.M. nr. 11–12/1987

Soluție: Se cunoaște descompunerea:

$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots + b^{2k})$,

atunci $1^{1987} + 6^{1987} = (1 + 6)(1^{1986} - 1^{1985} \cdot 6^1 + \ldots + 6^{1986}) = M7$

$2^{1987} + 5^{1987} = (2 + 5)(2^{1986} - 2^{1985} \cdot 5^1 + \ldots + 5^{1986}) = M7$

$3^{1987} + 4^{1987} = M7$

Deoarece $S = M7$; rezultă că restul împărțirii lui S la 7 este zero.

18. Dacă cifrele prin care se termină fiecare din numerele a^{4n}, b^{4n}, c^{4n}, d^{4n} sînt toate diferite între ele ($a; b; c; d; n \in |N^*$) să se afle care este ultima cifră a numărului $E = a^{4n} + b^{4n} + c^{4n} + d^{4n}$.

Dumitru Beșe — G.M. nr. 7/1981

Soluție: Dacă „a" se termină prin cifrele 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6, 7, 8, 9 atunci a^{4n} se termină prin cifrele 0; 1; 6; 1; 6; 5; 6, 1, 6, 1. Analog și pentru b; c și d. Cum ultimele cifre trebuie să fie diferite între ele, există o singură posibilitate, și anume $(0 + 1 + 5 + 6 = 12)$, cifra 2.

Scanned with OKEN Scanner

19. Fie numărul $n = 99\ldots9^{9^{9\ldots9}}$. Cifra 9 apare de n ori, atît la bază, cît și la exponent. Să se afle ultima cifră a numărului n.

Petre Țelinoiu

20. Fie $x_n = 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n} + 1$. Să se afle ultima cifră a numărului $N = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$

Constantin Nistorescu — G.M. nr. 1/1981

Soluție: $x_n = 2^{2^n} \cdot {}^2 - 2^{2^n} + 1 = 2^{2^n}(2^{2^n} - 1) + 1$.
x_0 se termină prin 6
x_1 se termină prin 3

Pentru $n \geq 2$, 2^{2^n} se termină cu, iar $2^{2^n} - 1$ se termină cu 5, deci $2^{2^n}(2^{2^n} - 1)$ se termină cu 0. Atunci x_n se termină cu 1.
$N = 3 \cdot 13 \cdot (\ldots1) \cdot (\ldots1) \ldots(\ldots1) = \ldots9$
Deci, N se termină cu 9.

21. Să se găsească ultimele două cifre ale numărului

$$M = (7^{2n} + 7^{2n+1} + 7^{2n+2} + 7^{2n+3}) : 7^n + \frac{7^{n+1} + 7^{n+3}}{7^n + 7^{n+2}};\ n \in \mathbb{N}^*$$

Iulian Mica — G.M. nr. 11/1981
R: 07

22. Să se stabilească ultimele 3 cifre ale numărului

$$N = 46^3 + 47^3 + 48^3 + 49^3 + 50^3 + 51^3 + 52^3 + 53^3 + 54^3$$

C.T. Nedelcu — G.M. nr. 7/1985

Soluție: $N = (50 - 4)^3 + (50 - 3)^3 + (50 - 2)^3 + (50 - 1)^3 + 50 + (50 - 1)^3 + (50 + 2)^3 + (50 + 3)^3 + (50 + 4)^3$
Grupînd termenii extremi și cei egali de extremi, apoi aplicînd formula $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, se obține $N = 100(10\,000 + 3 \cdot 30) + 50 = 1\,009\,050$.

23. Arătați că penultima cifră a numărului 4^{2k+1} este un număr par, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

Mircea Lascu — G.M. nr. 10/1984

Scanned with OKEN Scanner

24. Aflați numărul zerourilor cu care se termină produsul $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$

* * * — G.M. nr. 3/1983

Soluție: În produsul numerelor de la 1 la 99, cifra 5 apare în descompunere de 20 ori. Deci vor apare 20 de cifre de zero și, cu cele două cifre de zero de la factorul 100, în total 22 cifre de zero. Deci P se termină cu 22 de zero.

25. Să se găsească ultima cifră a numărului

$$M = \sum_{i=1}^{1984} (2^i + 3^i + 5^i), \text{ unde } \sum_{i=1}^{1984} a^i = a^1 + a^2 + \ldots + a^{1984}.$$

Andrei Boroș — G.M. nr. 12/1983

Soluție I

$$M = \sum_{i=1}^{1984} 2^i + \sum_{i=1}^{1984} 3^i + \sum_{i=1}^{1984} 5^i$$

Ultima cifră a lui 2^{4k+1} este 2; a lui 2^{4k+2} este 4; a lui 2^{4k+3} este 8; a lui 2^{4k} este 6. Deci, ultima cifră a primei sume este zero deoarece sînt $1\,984 : 4 = 496$ grupe care se termină cu zero.

Analog, ultima cifră a sumei $\sum_{i=1}^{1984} 3^i$ este 0 și a sumei $\sum_{i=1}^{1984} 5^i$ este tot 0. Deci ultima cifră a lui M este 0.

26. Să se arate că numărul

$$N = 1978^1 + 1978^2 + 1978^3 + 1978^4 + 1978^5$$

nu este pătrat perfect.

Stela Tomulescu — G.M. nr. 9/1979

R ! N se termină cu cifra 8, deci nu poate fi pătrat perfect.

27. a) Să se afle ultima cifră a numărului $3^{1976} + 5^{1980} + 7^{2000}$.

b) Să se arate că această cifră nu se schimbă prin permutarea exponenților.

I. Lașchi — G.M. nr. 2/1979

Capitolul al II-lea

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

A. NUMERE PARE ŞI IMPARE

1. Se dau numerele :

$p = 1 + 2^{1983} + 3^{1983} + \ldots + n^{1983}$

$q = 1983 + 1983^2 + 1983^4 + \ldots + 1983^n$

Să se precizeze dacă suma $S = p + q$ este număr par sau impar ($n \in |N$).

C. Iancu — G.M. nr. 2/1983

Soluţie : $S = p + q = (1 + 1983) + (2^{1983} + 1983^2) + (3^{1983} + 1983^3) + (4^{1983} + 1983^4) + (5^{1983} + 1983^5) + \ldots + (n^{1983} + 1983^n)$

Studiind paritatea şi imparitatea numerelor din paranteză se deduce că prima paranteză este număr par, a doua paranteză este număr impar ş.a.m.d., alternativ. De asemenea, suma a două numere impare este un număr par.

Concluzie : Dacă $n = 4k + 1$, $n = 4k + 4$, $k \in |N$, rezultă S este un număr par.

Dacă $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$, $K \in |N$, rezultă că S este număr impar.

2. Să se găsească două numere prime astfel încît suma lor să fie un număr natural impar de forma $\overline{aaa}$. (Numerele sînt scrise în baza 10.)

Vasile Apostol — G.M. nr. 7/1983

Soluţie : Numerele naturale impare de forma $\overline{aaa}$ sînt : 111, 333, 555, 777 şi 999. Deoarece suma celor două numere naturale este un număr natural impar, rezultă că unul din numere este par, iar celălalt este impar. Dar singurul număr prim par

este 2. Atunci cel de-al doilea număr poate fi : 109, 331, 553, 775, 997. Dar singurele numere impare sînt numai 109, 331 și 997. Deci, soluțiile vor fi : (2, 109) ; (2, 331) ; (2, 997).

3. Să se găsească un număr $\overline{ab}$ impar știind că suma $(\overline{ab})^2 + (\overline{ab})^3 + (\overline{ab})^4 + (\overline{ab})^5$ este un număr care are ultima cifră 4 și $(a + b) = (a - 1)^2$, $a \neq 0$.

Anca Ștefania Barbu — G.M. nr. 1/1985

Soluție : Dacă $b = 1$, $(\overline{ab})^n$ se termină cu 1, deci suma se va termina cu 4. Atunci $(a + 1) = (a - 1)^2$, adică $a = 3$. Deci, $\overline{ab} = 31$.

4. Fie 1 000 de numere naturale nenule și distincte avînd suma 1 000 988. Demonstrați că printre ele există cel puțin două numere impare.

Liliana Niculescu — G.M. nr. 6/1980

Soluție : Presupunem că toate cele 1 000 de numere sînt pare. De exemplu : 2, 4, 6, ..., 2 000. Atunci suma lor va fi $S_{1000} = \frac{(2 + 2\,000)\,1\,000}{2} = 1\,001\,000$. Dar această sumă diferă cu 2 unități de 1 001 998. Rezultă că cel puțin două numere sînt impare.

5. Să se găsească numărul de forma $\overline{xyyx}$ știind că x și y sînt cifre impare și că $\overline{yx}$ este cu o unitate mai mic decît dublul răsturnatului său.

Sorin Furtună — G.M. nr. 4/1981

Soluție : $\overline{yx} + 1 = 2 \cdot \overline{xy}$ sau $8y + 1 = 19x$; R : 3 773

6. Fie s suma a 53 numere cuprinse între 1 și 99.

1) Să se calculeze numărul maxim și numărul minim de numere impare astfel ca s să fie :

a) impară, respectiv b) pară.

2) Să se calculeze numărul maxim și numărul minim de numere pare astfel ca suma s să fie :

a) impară, respectiv b) pară.

Ilie Bălășan — G.M. nr. 5/1981

Soluție: 1) a) Numărul maxim de numere impare astfel ca s să fie impară este de 49 numere impare și 4 numere pare. Numărul minim de numere impare astfel ca s să fie impară este de 5 numere impare și 48 pare.

b) Numărul maxim de numere impare astfel ca s să fie pară este de 50 numere impare și 8 pare. Numărul minim de numere impare astfel ca s să fie pară este de 4 numere impare și 49 pare.

Analog pentru 2).

7. Să se arate că orice număr natural mai mare ca 8 se poate scrie ca o sumă de numere prime.

Florentina Smarandache — G.M. nr. 2/1983

R: Dacă $n = 2k$, $n = 2 + 2 + \ldots + 2$, k termeni

Dacă $n = 2k + 1$, $n = 2 + 2 + \ldots + 2 + 3$, k termeni

8. Să se demonstreze că împărțind la 8 pătratul oricărui număr natural impar, obținem un rest egal cu unitatea.

Julia Botar — G.M. nr. 8/1977

Soluție: $(2k + 1)^2 : 8 = \dfrac{k(k+1)}{2} + \dfrac{1}{8}$

9. Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2.

a) Dovediți că 2^n se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive.

b) Dovediți că 3^n se poate scrie ca o sumă de 3 numere naturale consecutive.

Adrian P. Ghioca — G.M. nr. 8/1979

Soluție: a) $2^n = (2k - 1) + (2k + 1)$, de unde $k = 2^{n-2}$

R: $2^{n-1} - 1$; $2^{n-1} + 1$

b) $3^n = (k - 1) + k + (k + 1)$, de unde $k = 3^{n-1}$

R: $3^{n-1} - 1$, 3^{n-1}, $3^{n-1} + 1$

10. Diferența dintre un număr natural par și un număr prim este 20 000. Să se afle numerele.

Walter Farkaș — G.M. nr. 11/1985

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Singurul număr prim care este și par este 2. Deci cele două numere sînt 20 002 și 2.

11. Suma dintre un număr prim și un număr natural impar este 1 547. Să se afle numerele.

I. G. Ligor — G.M. nr. 8/1978

R. 2. 1545

Scanned with OKEN Scanner

B. NUMERE PRIME

1. Suma a 6 numere întregi consecutive este un număr prim. Să se afle cele 6 numere.

Patrik Popescu-Pompu — G.M. nr. 2/1987

Soluție: $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 3(2n + 5)$. Ca suma să fie număr prim, trebuie ca $2n + 5 = 2k + 1$

R: -2; -1; 0; 1; 2; 3.

Mai sînt și alte soluții?

2. Să se determine numerele prime de 3 cifre, știind că că produsul cifrelor sale este 252.

Concurs Traian Lalescu — G.M. nr. 9/1987

R: 479; 947

3. Să se găsească toate numerele prime de 3 cifre, știind că produsul cifrelor este 441.

Andrei Boroș — G.M. nr. 7/1982

R: 797; 977. Mai sînt și alte numere?

4. Să se determine cel mai mic număr prim de 4 cifre.

Tiberiu Joldiș — G.M. nr. 3/1986

R: 1 009

5. Descompuneți pe rînd numerele 111; 1 111; 11 111, 111 111, 1 111 111 în produs de numere prime.

* * * — G.M. nr. 4/1986

R: $111 = 3 \cdot 37$; $1\,111 = 11 \cdot 101$; $11\,111 = 41 \cdot 271$...

6. Determinați numărul p prim pentru care $p^2 + 8$ și $p^3 + 4$ sînt de asemenea prime.

Mathematics Bulletin, Ontario, 2/1984 din G. M. nr. 4/1986

R: $p = 3$

7. Să se afle $k = \in \mathbb{N}$ pentru care $8^k + 1$ și 585 sînt relativ prime.

Adrian Cindrea — G.M. nr. 8/1986

R: $k = 4$

8. Suma a 6 numere prime consecutive este un număr prim. Să se determine numerele.

Ady Lucian Ivașcu — G.M. nr. 4/1988

R: $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 29$

9. Să se afle cîte numere prime cu 10 000 și mai mici decît 10 000 există.

E. Rogai — G. M. nr. 12/1979

Soluție: Numerele naturale prime cu 10 000 sînt toate numerele care nu-l conțin nici pe 2, nici pe 5 și nici puteri ale acestora.

Numărul numerelor naturale pînă la 10 000 divizibile cu 2 este $10\,000 : 2 = 5\,000$.

Numărul numerelor naturale pînă la 10 000 care sînt divizibile cu 5 este $10\,000 : 10 = 1\,000$.

De asemenea, numărul 1 este un divizor banal al oricărui număr. Deci, 6 001 numere nu sînt prime cu 10 000. Rămîn 3 999 de numere naturale mai mici decît 10 000 și care sînt prime cu 10 000.

10. Din numerele prime 13, 17, 37, 79 se obțin tot numere prime scriind cifrele în ordine inversă. Există oare numere prime de 3 cifre care să aibă cifrele diferite, la care, schimbîndu-se oricum ordinea lor, să se obțină tot numere prime de 3 cifre?

Olimpiada din Germania — G.M. nr. 1/1978

Soluție: Ca să fie numere prime, vom folosi numai cifrele 1, 3, 7, 9: 137 este prim, dar $731 = 43 \cdot 17$ este compus ș.a.m.d.

Considerînd toate combinațiile posibile de 8 cifre luate din 4, obținem, de exemplu, 179 și 971 care sînt numere prime. Mai sînt și alte numere?

11. Se dă numărul $N = 100 \ldots 01$, numărul zerourilor fiind 101. Să se demonstreze că acest număr nu este prim.

Ionel Atanasiu — G.M. nr. 2/1981

R: $N = 10^{101} + 1^{101} = (10 + 1)(10^{100} - 10^{99} + \ldots + 1)$

12. Se dă mulțimea $A = \{1; 8; 5\}$. Cîte numere prime de forma $\overline{aab}$; $\overline{baa}$; $\overline{aba}$ se pot forma cu elementele acestei mulțimi?

I. Danielescu — G.M. nr. 12/1979

R: 118; 881; ...

13. Cîte numere naturale mai mici decît 1979^{1980} nu sînt prime cu 1 979?

Petre Simion — G.M. nr. 1/1980

Soluție: Numărul 1979 este număr prim. Atunci numerele mai mici decît 1979^{1980} care nu sînt prime cu 1979 vor fi toți multiplii lui 1979, adică 1979; 1979^2; 1979^3; ...; 1979^{1980}; deci 1979 de numere.

14. Să se demonstreze că $\overline{8xy}$ și 187 sînt prime între ele, oricare ar fi cifrele x și y.

George Mărgineanu — G.M. nr. 5/1981

Soluție: Numărul 187 este prim. Dar $187 \cdot 2 = 274$ și $187 \cdot 8 = 411$.

15. Știind că $a; b; n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, $a > b$ și că numărul $a^n - b^n$ este prim, să se arate că n este prim și $a = b + 1$.

Traian Florea — G.M. nr. 11/1981

Soluție: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, $a - b = 1$, $a = b + 1$, descompunere unică, n prim. Dacă n ar fi compus, atunci $a^n - b^n$ este compus.

16. Să se arate că orice număr de forma $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 1$ se poate scrie ca un produs de doi factori primi în tre ei, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 10/1981

Soluție: $A = (n^3 + 1)^2 - n^4 = (n^3 + n^2 + 1)(n^3 - n^2 + 1) = [n^2(n+1) + 1] \cdot [n^2(n-1) + 1]$

17. Să se determine numărul natural de 4 cifre a cărui descompunere în factori primi este de forma $a^5 \cdot b^5$.

Ion Fota — G. M. nr. 1/1985

R: $2^5 \cdot 3^5 = 7\,776$; $1^5 \cdot 5^5 = 3\,125$

Mai sînt și alte soluții?

18. Să se afle cel mai mic număr de 4 cifre care se poate descompune într-un produs de 6 factori primi a căror sumă este 200.

Constantin Scripcaru — G.M. nr. 7/1985

Soluție: $\overline{abcd} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, $p_1 + p_2 + p_3 = 200$
$2 \cdot 5 \cdot 193 = 1\,930$; $2 + 5 + 193 = 200$

19. Aflați cel mai mic număr natural de două cifre care împărțit la 7 dă rest un număr prim, iar suma dintre cît și rest este tot un număr prim. Care este cel mai mare număr natural de 3 cifre cu aceste proprietăți?

Damian Marinescu — G.M. nr. 9/1985

R: $\overline{ab} = 15$; $\overline{abc} = 967$

20. Să se găsească toate numerele prime care sînt mai mici cu o unitate decît un cub perfect.

Mircea Lascu — G.M. nr. 9/1985

R: $7 = 2^3 - 1$ Mai sînt și alte numere?

21. Arătați că nu există nici un număr prim astfel încît suma dintre el și $n^2 + n$ să fie 1 984, unde $n \in \mathbb{N}$.

Nicolae Tălău — G.M. nr. 9/1984

Soluție: $p + n^2 + n = 1\,984$ sau $n(n+1) = 2^6 \cdot 31 - p$

Scanned with OKEN Scanner

22. Să se arate că oricare ar fi numărul prim $p > 5$, prin împărțirea lui p^2 la 30 obținem restul 1 sau restul 19.

* * * — G.M. nr. 7/1977

Soluție: (1) $p = M30 + r$, $0 \leq r < 30$, $r \in \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$; (2) $p^2 = M30 + r^2$. Se verifică pe rînd toate valorile lui r și se obține afirmația din problemă.

23. Să se determine cifrele a și b știind că numărul $N = \overline{abbabb}$ scris în baza 10 se descompune într-un produs de 6 factori primi consecutivi.

Ioan Indre — G.M. nr. 7/1977

Soluție: $N = 7 \cdot 11 \cdot 13(10^2 \cdot a + 11b)$
Pentru $a = 2$, $b = 5$, $N = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$

24. Dacă p este un număr prim, atunci numărul $p + 1$ nu poate fi pătrat perfect, unde $p > 3$.

Dorin Andrica — G.M. nr. 8/1977

Soluție: Orice număr prim se termină cu una din cifrele 1, 3, 7, 9. Atunci $p + 1$ se termină cu 2, 4, 8, 0, deci nu poate fi prim.

25. Cîte numere prime de două cifre rămîn prime și după ce le răsturnăm?

Florin Pop — G.M. nr. 9/1977
R: 11, 13, 17, 31, ...

26. Se dă numărul $A = \overline{3xx3x}$. Să se găsească cifra x astfel încît numărul A să fie produs de numere consecutive, prime.

Rodica Marinescu — G.M. nr. 1/1982
R: $x = 0$

27. Se consideră următoarea descompunere în factori primi: $\overline{aaa} = b \cdot a \cdot \overline{ba}$. Determinați cifrele a și b. (Numerele au fost scrise în baza 10.)

Niculae Grigorescu — G.M. nr. 2—3/1982
R: $a = 7$, $b = 3$

Cd. 92 școala 6

Scanned with OKEN Scanner

28. Să se găsească numărul prim $\overline{abc}$ știind că $\overline{cba}$ și $\overline{bca}$ sînt numere prime, iar $a + b + c = \overline{ac}$.

Ștefan Anastase — G.M. nr. 6/1982
R : 197

29. Să se găsească a, b, c numere naturale prime, astfel ca $a^2b^2c^2 + a^2b^2c + a = 1\,982$.

Mircea Lucu — G.M. nr. 8/1982
R : 2, 3, 5

30. Să se găsească două numere prime consecutive dacă se știe că suma lor este 1 300.

Andrei Baroș — G.M. nr. 5/1983
R : 647 ; 653

31. Să se reconstituie numărul $A = \overline{a4mnx}$ a cărei descomunere în factori primi este indicată mai jos.

$\overline{a4mnx}$	$2^2 \cdot 5^2$
$\overline{a4m}$	*
$\overline{*47}$	3
$\overline{4*}$	7
*	*
1	

Gh. Bucur — G.M. nr. 4/1981
R : 44 100

32. Să se determine toate perechile de numere prime (a, b) pentru care suma și diferența lor sînt tot numere prime.

Damian Marinescu — G.M. nr. 9/1978
R : (5, 2) Demonstrați că nu mai există o altă pereche.

33. Care numere cuprinse între 1 și 100 se descompun în cel mai mare număr de factori primi?

I. Joldiș — E : 5 278
R : $96 = 2^5 \cdot 3$

Scanned with OKEN Scanner

34. Să se demonstreze că orice număr prim $p > 3$, prin împărțirea la 6, dă restul 1 sau 5. Reciproca este adevărată? Să se dea exemple!

* * * — E 5 621

R i Reciproca nu este adevărată. $25 = 4 \cdot 6 + 1$

35. Să se determine toate numerele prime de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab} - 5 \cdot \overline{cd} = 1$ sau $\overline{ab} - 5 \cdot \overline{cd} = -1$.

Damian Marinescu — G.M. nr. 2/1985

R i 9 419 și 9 619

36. a) Să se arate că un număr de 4 cifre, avînd cifrele identice două cîte două, nu poate fi prim.

b) Să se găsească numerele de 3 cifre distincte astfel încît cifrele numărului să fie factori primi pentru număr.

D. Acu — G.M. nr. 7/1979

R i a) $\overline{aabb} = M11$; $\overline{abab} = M\,101$; $\overline{abba} = M\,11$

b) 182; 812; 185; 815; 175; 785

37. Să se arate că pentru orice n natural, suma dintre produsul primelor n numere impare este un număr impar

Gh. Vișan — G.M. nr. 12/1979

C. CRITERII DE DIVIZIBILITATE

1. a) Suma numerelor de la 1 la 1 000 este divizibilă cu 8? Dar suma numerelor naturale de la 1 la 8 000 000?

b) Ce condiție trebuie să îndeplinească un număr natural pentru ca suma dintre el și numerele naturale mai mici decît el să fie divizibile cu 8?

Ion Deneanu — G.M. nr. 4/1977

R: a) $(1 + 1\,000) \cdot 1\,000 : 2 = 1\,001 \cdot 500 \neq M3$

$(1 + 8\,000\,000) \cdot 8\,000\,000 : 2 = 8\,000\,001 \cdot 1\,500\,000 = M8$

b) $M8$; $M8 - 1$

2). Să se arate că la orice număr de 8 cifre, adunîndu-se de două ori cifra sutelor, de două ori cifra zecilor și de două ori cifra unităților sale, se obține un număr divizibil cu 8.

Gheorghe și Viorel Pană — G.M. nr. 12/1977

R: $\overline{abc} + 2a + 2b + 2c = 102a + 12b + 8c = M3$

3. Să se afle toate numerele naturale scrise în baza 10 de forma $\overline{54xy}$ divizibile cu 6.

Constantin Dinu — G.M. nr. 10/1979

Soluție: Dacă un număr se divide prin 6, se divide și prin 2 și prin 3. Dacă numărul $\overline{54xy}$ se divide prin 2, rezultă $y = \in\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Considerăm pe rînd cele 5 cazuri.

I) Dacă $y = 0$, atunci $\overline{54x0}$ se divide prin 8, și aplicînd criteriul de divizibilitate cu 8, avem $9 + x = M3$. Deci $x \in \{0, 8, 6, 9\}$. Obținem numerele 5 400; 5 480; 5 460 și 5 490. Se continuă cu celelalte cazuri: $y \in \{2, 4, 6, 8\}$.

4. Se consideră numărul natural $n = \overline{8a5b2cd}$. Să se determine cifrele a, b, c și d ale numărului n, astfel încît să îndeplinească simultan condițiile:

1) $a \neq b \neq c \neq a$;
2) b multiplu de a și c multiplu de b;
3) n se divide prin 6.

Gh. Tutulan — G.M. nr. 11/1982

Soluție : $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. De exemplu, dacă $d = 4$, avem $\overline{3a5b2c4}$ se divide cu 3, deci $3 + 5 + 2 + 4 + (a + b + c) = M3$ sau $14 + (a + b + c) = M3$, deci $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$, unde s-au respectat condițiile problemei.

Mai sînt și alte soluții?

5. Un elev a scris un număr de 4 cifre avînd cifra unităților egală cu 3. Din acest număr a scăzut răsturnatul său și a obținut 5 904. Să se afle numărul știind că acesta este scris în baza 10, că este divizibil cu 9 și că diferența dintre cifra zecilor și cea a sutelor este 1.

Dumitru Cojocaru — G.M. nr. 11/1977
R : 9 783

6. Să se scrie încă două cifre la dreapta numărului 1 979 astfel ca numărul obținut să fie divizibil cu 36.

C. Ionescu — Tiu — G.M. nr. 6/1979

Soluție : $\overline{1979ab}$ divizibil cu 36 înseamnă că va fi divizibil și cu 9 și cu 4. Atunci $1 + 9 + 7 + 9 + a + b = M9$ sau $a + b = 1$ sau $a + b = 10$. Dar $a + b = 1$ nu convine deoarece $\overline{ab}$ nu se mai divide prin 4. Deci $a + b = 10$ și cum $\overline{ab} = M4$, rezultă $\overline{ab} = 64$, se obține $197\,964 = 36 \cdot 5\,499$.

7. Să se determine toate numerele naturale de 3 cifre din sistemul zecimal, știind că se divid cu suma cifrelor lor dînd cîtul 37.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 5/1985
R : 111; 222; 333. Găsiți și alte numere!

8. Să se afle toate numerele scrise în baza 10, de forma $\overline{abab}$ care sînt divizibile cu 12.

Adrian Necula — G.M. nr. 4/1980
R : 1 212; 2 424; ...

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se afle toate numerele de 5 cifre, scrise în baza 10, în care produsul dintre numărul format din primele 3 cifre și suma ultimelor două cifre este 1 985. Care din aceste numere sînt divizibile cu 12?

Maria și Ion Stoica — G.M. nr. 1/1987

Soluție: $n = \overline{abcde}$; $\overline{abc} \cdot (d + e) = 1\,985$ sau $(100a + 10b + c) \cdot (d + e) = 397 \cdot 5$. Cum 397 este număr prim, avem $a = 3$, $b = 9$, $c = 7$, $d + e = 5$. Distingem mai multe cazuri. Punînd condiția de divizibilitate cu 12, găsim 39 732. Mai sînt și alte numere?

10. Fie numărul $\overline{xx0yz}$ în baza 10, cu $x \neq 0$ și $z \neq x \neq y \neq z$. Să se determine $M = \{x, y, z\}$ știind că numărul dat este divizibil cu 5 și se poate descompune în produs de pătrate de numere prime consecutive.

Grigore Preoteasa — G.M. nr. 12/1981

Soluție: $\overline{xx0yz}$ divizibil cu 5 înseamnă că $z \in \{0, 5\}$. Pentru $z = 5$ avem $\overline{xx0y5} = 5(2 \cdot 1\,000x + 2 \cdot 100x + 2y + 1)$. Pentru a obține încă un factor 5, luăm $y = 2$, atunci avem : $\overline{xx0y5} = 5^2 (4 \cdot 100x + 4 \cdot 10x + 1)$. Dacă $x = 1$, se obține $11\,025 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, $M = \{1, 2, 5\}$.

11. Se cer numerele de forma $\overline{abac}$ divizibile cu 5, astfel ca suma cifrelor să dea un număr format cu cifre identice, cu $a \neq b \neq c \neq a$.

Violeta Luminița Safta — G.M. nr. 6/1981

Soluție: $c \in \{0, 5\}$. Pentru $c = 0$, $a + b + a = \overline{xx}$, avem : 8 530, 9 490. Pentru $c = 5$, $a + b + c = \overline{xx}$, avem : 1 415; 8 035; 8 185; 7 375; 6 565; 4 945; 5 755; 2 225. Cum $a \neq b \neq c \neq a$, rămîn numerele: 8 580; 9 490; 1 415; 8 035; 8 185; 7 375; 4 945.

12. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ în baza 10 divizibile cu 15 astfel ca $\overline{cba} - \overline{abc} = 297$

Lucian Niculescu — G.M. nr. 3/1983

R: 255; 285; ...

Scanned with OKEN Scanner

13. Să se găsească un număr natural de forma $\overline{abca}$ pătrat perfect, divizibil cu 15, unde a, b, c reprezintă cifre distincte în sistemul de numerație cu baza 10.

Adrian Vlada — G.M. nr. 6/1980

R : 5 625

14. Se dă un număr de 5 cifre $\overline{xyzqw}$. Se știe că $\overline{xyzqw}$ se divide cu 25; $w - x = 2$, q = par, z = impar și $x + y = q + w = z$. Să se afle acest număr.

Magda Lăcrămioara — G.M. nr. 1/1982

R : 54 725

15. Să se determine toate numerele de forma $\overline{1988abc}$, scrise în baza 10, care se divid cu 125.

Ion Lupșor — G.M. nr. 4/1988

R : 1 988 000; 1 988 125; ...

16. Se consideră numărul $\overline{abcd}$, scris în baza 10, avînd toate cifrele impare și $a > d$ și $b > c$. Să se determine toate cifrele sale astfel ca diferența dintre număr și răsturnatul său să fie divizibilă cu 108. Cîte soluții are problema?

Sorin Furtună — G.M. nr. 6/1985

R: 5 931; 9 715

17. Să se afle un număr de 3 cifre știind că este pătrat perfect și că diferența dintre el și răsturnatul său este divizibil cu 8.

A. Setelecan — G. M. nr. 8/1985

Soluție: $\overline{abc} - \overline{cba} = M\ 8$ și $\overline{abc} = k^2$ sau $99\ (a - c) = M8$ și $\overline{abc} = k$ sau $\overline{9b1} = k^2$, deci $\overline{abc} = 961$.

18. Numărul meu de telefon este de forma $\overline{ab3c2}$ și se divide cu 36. Știind că $a < 2$ și că b este egal cu ultima cifră plus 3, să se afle numărul de telefon.

Liviu Fecioru — G.M. nr. 9/1984

R: 15 372

19. Să se înlocuiască literele a, b, c din numărul $\overline{1a3bc}$ cu cifre astfel ca numerele obținute să fie divizibile cu 75.

Daniela Baizat — G.M. nr. 7/1979

R : 11 325 ; 14 325 ; ....

20. Să se determine toate numerele naturale scrise în baza 10 sub forma $N = \overline{abcba}$, divizibile cu 225.

Gh. Leonte — G.M. nr. 8/1984

R : 57 375

21. Să se găsească toate numerele naturale de forma $\overline{abbc}$, pătrate perfecte, divizibile cu 25, unde a, b, c reprezintă cifre distincte în sistemul de numerație cu baza 10.

Maria și Valentin Rață — G.M. nr. 11/1982

R : 1 225 ; 4 225 ; ...

22. Să se demonstreze că dacă printre ultimele 3 cifre ale unui număr există cifra 9, atunci numărul nu se divide cu 125.

Mircea Lascu — G.M. nr. 10/1984

Soluție : Un număr este divizibil cu 25 dacă se termină prin 00 ; 25 ; 50 ; 75. Numerele care se termină prin 900 ; 925 ; 950 ; 975 nu sînt divizibile prin 125.

23. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, și a; b cifre în baza 10, numărul $\underbrace{a00\ldots00b}_{n \text{ cifre}} - \overline{ab}$ este divizibil cu 45.

Dinu Constantin — G. M. nr. 2/1980

Soluție : $a \cdot 10^{n+1} + b - 10a - b = a \cdot 10 \cdot (10^n - 1)$. Dar $10 = M5$ și $10^n - 1 = M9$, deci numărul se divide cu 45.

24. Să se determine cel mai mic număr $N = \overline{abcd}$ de 4 cifre distincte care se divide cu 4; 5 și 9 și pentru care este verificată relația $a + b = c$.

Ernö Ianoși — G.M. nr. 2—3/1982

R : 1 980

Scanned with OKEN Scanner

25. Să se arate că diferența pătratelor a două numere naturale care se termină cu cifra 9 este divizibilă prin 40.

I. Voicu — G.M. nr. 8/1977

Soluție: Considerăm mai întîi numere de două cifre. Numai numerele de forma $\overline{a8}$ și $\overline{a7}$, prin ridicare la pătrat, se termină cu 9.

I) $\overline{a8}^2 - \overline{b8}^2 = 20(a - b)(5a + 5b + 3)$

Dacă $a - b = M2$, atunci diferența pătratelor este divizibilă prin 40.

Dacă $a - b \in \{1, 8, 5, 7\}$, atunci $5a + 5b + 3 = M2$, deci diferența este divizibilă prin 40.

II) $\overline{a7}^2 - \overline{b7}^2 = 20(a - b)(5a + 5b + 7)$. Se judecă în mod asemănător.

Dacă numerele sînt mai mari cu 3, 4 ... cifre, se procedează ca mai înainte, se ține cont de faptul că $1\,000 = M40$.

26. Să se afle cele mai mici 100 numere naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105. Produsul acestor numere este divizibil cu 10^{25}?

Maria Vizuroiu — G.M. nr. 3/1987

Soluție: Notăm cu n primul număr. Suma va fi:
$n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + 99) = 100n + (1 + 2 + ... + 99) = 100n + (1 + 99) \cdot 99 : 2 = 50(2n + 99)$. Cum $2 \cdot 25 (2n + 99) = M105$, rezultă $2n + 99 = M21$. Deci $M21 \in \{21, 42, ...\}$ Condiția de minim va fi $n = 8$. Deci șirul numerelor va fi: 8, 4, 6, ..., 100, 101, 102.

În componența acestor numere sînt mai mult de 25 de cîte 5 și mai mult de 25 de cîte 2, deci se divide cu $2^{25} \cdot 5^{25} = 10^{25}$.

27. Fie numărul natural $N = \overline{ababa}$ unde a și b sînt cifre în sistemul de numerație zecimal, $a \neq 0$.

a) Să se arate că dacă b se divide cu 8, atunci N se divide cu 3.

b) Dacă b se divide cu 7, atunci N se divide cu 7.

c) Există un singur număr N de această formă care se divide cu 45.

Venus Ungureanu — G.M. nr. 4/1981

R: 56 565

28. Cîte numere naturale scrise în baza 10 de forma $\overline{8xyz136}$ divizibile cu 8 există ?

Gh. Corina — G.M. nr. 2/1983

R : 1 000

29. Să se găsească un număr natural mai mare decît 800, dar mai mic decît 900, care să fie divizibil cu orice număr de la 1 la 8.

Bogdan Popescu — G.M. nr. 3/1981

R : 840

30. Să se reconstituie înmulțirea $\overline{abba} \cdot \overline{cba} = \overline{abaaba}$ știind că unul din factori este număr prim, iar celălalt este divizibil cu 9.

V. Negoiță — G.M. nr. 2/1980

R : $9\,009 \cdot 101 = 909\,909$

31. Cîte valori poate lua suma $S = 1\,982 + \overline{198a1b}$ știind că numărul $\overline{198a1b}$ este divizibil cu 45?

Mihaela Banyai — G.M. nr. 4/1982

R : Două valori

32. Se consideră numerele $N_1 = \overline{5x238}$, $N_2 = \overline{674y}$, $N_3 = \overline{7251z}$, scrise în baza 10. Să se înlocuiască x, y, z cu cîte o cifră, astfel încît numărul $S = N_1 + N_2 + N_3$ să fie divizibil cu 72.

Gh. Tutulan — G.M. nr. 3/1980

R : $N_1 = 55\,238$; $N_2 = 6\,748$; $N_3 = 72\,510$

33. Fie numărul $\overline{abcd}$ scris în baza 10 și $S = \overline{abcd} + \overline{dcba}$. Să se arate că S se divide cu 27 dacă și numai dacă $a + b + c + d = 27$.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 7/1985

Soluție : $S = 11[8 \cdot 27(a + d) + 10(a + b + c + d)]$; $a + b + c + d = 27 \Leftrightarrow S = 11 \cdot 27\,[8(a + b) + 10]$ sau $S = M27$.

34. Fie N un număr natural, scris în baza 10, de forma $N = \overline{abba}$, unde a și b sînt cifre, iar $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1) Să se arate că N este totdeauna divizibil cu 11.

2) Să se arate că N nu poate fi divizibil cu 18.

3) Să se determine toate numerele N divizibile cu 7.

Adrian P. Ghioca — G.M. nr. 2/1978

Soluție: a) $\overline{abba} = 11 \cdot (91a + 10b) = M11$

b) Aplicînd criteriul de divizibilitate cu 18, pentru N avem: $\overline{bba} - a = \overline{bb0} \neq M18$

c) Aplicînd criteriul divizibilității cu 7, avem: $\overline{bba} - a = \overline{bb0}$. Pentru $b = 7$ și $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ se obțin numerele: 1 771; 2 772; 3 773; ...; 9 779.

35. Un abonat la serviciul telefonic din Tg. Jiu, întrebat ce număr de telefon are, răspunde că numărul poate fi determinat știind că îndeplinește simultan condițiile:

a) este un număr de 5 cifre;

b) este un multiplu al lui 11;

c) diferența dintre el și suma cifrelor sale este 16 416.

Ionel Manta — G.M. nr. 1/1982

Soluție: Din condițiile problemei avem:

$\overline{abcde} - (a + b + c + d + e) = 16\,416$ sau $1111a + 111b + 11c + d = 1\,824$, de unde se obține $a = 1$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 3$, $e = 4$. Deci numărul de telefon este 16434.

36. Se dă un număr natural de forma $N = \overline{aabb}$ scris în baza 10.

1) Să se arate că N este divizibil cu 11.

2) Să se arate că dacă $a + b = 11$, atunci numărul N se divide cu 121.

3) Să se determine a și b astfel ca N să fie pătrat perfect.

Mihai Sevelegeanu — G.M. nr. 2/1980

Soluție:

1) $\overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b}$

2) Dacă $a + b = 11$, atunci $\overline{aabb} = 11^2 \cdot \overline{(a-1)b}$

3) $a = 7$ și $b = 4$, avem $N = 7\,744 = 88^2$

Scanned with OKEN Scanner

37. Să se arate că numărul scris în baza 10; $N = \overline{abcdxy} + \overline{yxdcba}$ este multiplu de 11.

x x x — G.M. nr. 12/1979

Soluție: Aplicînd criteriul divizibilității cu 11, că diferența între suma cifrelor de rang par și suma cifrelor de rang impar este zero sau multiplu de 11, avem: $(a + c + x) - (y + d + b) + (y + d + b) - (a + c + x) = 0$. Deci N se divide cu 11.

38. Să se găsească numerele naturale scrise în baza 10, de forma $\overline{(a-5)(a-1)(a-4)(a-2)ax}$, care se divid prin 11. (Fiecare paranteză reprezintă o cifră).

Mihai Doroftei — G.M. nr. 8/1980

Soluție: Se aplică criteriul din problema nr. 37, unde $a \geq 6$ și se obțin rezultatele următoare: 152 460; 263 571; 374 682; 485 793.

39. Să se determine cifrele a, b, c astfel încît numărul $M = \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} - 6$ să fie divizibil cu 11.

I. Safta — G.M. nr. 10/1979

R: a = 1; b = 3; c = 5. Mai sînt și alte soluții?

40. Să se arate că numărul $N = \overline{abb \ldots bba}$, acris în sistemul zecimal și avînd un număr n par de cifre, este divizibil cu 11.

Ion Voicu — G.M. nr. 12/1977

Soluție: Dacă N are un număr par de cifre, atunci și cifra b apare de un număr par de ori.

$N = \overline{a00 \ldots 00a} + \overline{bb \ldots b0} = 100 \ldots 001 \cdot a + 11 \ldots 110b$

$\underbrace{100 \ldots 001}_{\text{număr par de zerouri}} = M11 \qquad \underbrace{11 \ldots 110}_{\text{număr par de 1}} = M11$ Deci $N = M11$

41. Se consideră numărul $A = \overline{abbabb \ldots abba}_{(10)}$ și fie n numărul cifrelor lui A egale cu a. Să se arate că dacă n este un număr par, atunci 11 divide pe A. Reciproca este adevărată?

Ilie Romea — G.M. nr. 5/1981

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $A = \overline{a00a00 \ldots a00a} + \overline{bb0bb00 \ldots 0bb0} = 1001001 \ldots 1001 \cdot a + 110110 \ldots 0110 \cdot b$. Dar $1001 = M11$ și $1001001 \neq M11$. Deoarece n este număr par, rezultă că $1001001 \ldots 1001 = M11$. De asemenei, $110110 \ldots 110 = M11$. Deci $A = M11$ sau 11 divide pe A. Reciproca este adevărată?

42. Să se determine cifrele x, y ale numărului $\overline{1x2y3y4x}$ scris în baza 10, știind că acesta este divizibil cu 88.

Liviu Pîrșan — G.M. nr. 8/1980

R: $x = 9$, $y = 7$, $19\,278\,947 = 83 \cdot 584\,059$
$x = 7$, $y = 8$, $17\,293\,748 = 88 \cdot 524\,053$
Găsiți și altă soluție!

43. Să se determine numerele scrise în baza 10, de forma $\overline{abcdexy}$, divizibile cu 55, știind că cifrele a, b, c sînt consecutive.

Mihai Doroftei — G.M. nr. 10/1980

R: 5 678 970; 4 567 860; 8 456 750; ...
5 678 915; 4 567 805; 2 845 659; ...

44. Fiecare cifră a unui număr de 8 cifre scris în baza 10 este pară și numărul este divizibil cu 77. Să se afle acest număr.

Ioan Joldiș — G.M. nr. 10/1977

R: $462 = 77 \cdot 6$

45. Să se determine numărul de 4 cifre $\overline{abcd}$, scris în baza 10, știind că este divizibil cu 80, iar cifrele sale verifică egalitatea $a + d = b + c = 9$.

Alexa Dumitrescu — G.M. nr. 8/1980

R: 9 360; ...

46. Să se găsească toate numerele naturale cu 5 cifre de forma $\overline{abcba}$, divizibile cu 165, $a \in \mathbb{N}^*$, $b, c \in \mathbb{N}$.

x x x — G.M. nr. 10/1985

Soluție: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$
Aplicînd criteriul cu 5 și $a \in \mathbb{N}^*$ rezultă $a = 5$. Aplicînd crite-

riul cu 8, rezultă $10 + 2b + c = M3$, iar din criteriul cu 11 avem $20c + 5b + 1 = M11$. Pentru $b = 1$ și $c = 3$, obținem $\overline{abcba} = 51\,315$. Mai sînt și alte numere?

47. Să se arate că suma tuturor numerelor de 3 cifre, scrise în baza 10, cu cifrele a, b, c este divizibilă cu 2 și 111.

I. Hereșanu — G.M. nr. 10/1980

Soluție: $S = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a + b + c) = M222$.

48. Să se determine perechile de cifre (x, y) astfel ca numărul $N = \overline{axyb} + \overline{byxa}$, scris în baza 10, să fie divizibil cu 13.

Ion Diaconu — G.M. nr. 3/1980

Soluție: $N = 1001(a + b) + 110(x + y)$. Cum $N = M11$ și $1001 = M13$, rezultă $x + y = M13$, deci avem: (9, 4); (8, 5); (7, 6); (6, 7); (5, 8); (4, 9).

49. Numerele $\overline{abcd}$ și $\overline{dcba}$ sînt divizibile simultan cu 13? Să se afle x și y știind că $\overline{x9y4} + \overline{4y9x}$ este multiplu de 13.

I. Safta — G.M. nr. 10/1979

Soluție: Nu. Spre exemplu $2275 = M13$, dar $5722 \neq M13$. Din $\overline{x9y4} + \overline{4y9x} = M13$ rezultă $\overline{9y4} - x + \overline{y9x} - 4 = M13$.

Pentru $x = 7$ și $y = 4$, avem $7\,944 + 4\,497 = 12\,441 = 13 \cdot 957 = M13$

50. Să se determine toate numerele de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza 10, cu $a > b > c > d$, știind că atît ele cît și răsturnatele lor se divid cu 13.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 8/1983

Soluție: Dacă $\overline{abcd}$ și $\overline{dcba}$ se divid prin 13, atunci și suma lor se divide prin 13. Deci $\overline{bcd} - a + \overline{cba} - d = M13$ sau $(b + c) \cdot 110 = M13$, adică $a + b = 13$.

Avem mai multe soluții. De exemplu, dacă $b = 7$, $c = 6$, atunci $a = 8$, iar $d \in \{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$. Dar numai pentru $d = 2$ obținem $8\,762 = 13 \cdot 674$ și $2\,678 = 13 \cdot 206$.

Găsiți și alte soluții!

Scanned with OKEN Scanner

51. Să se arate că oricare ar fi numerele a, b, c, notînd $A = 2a + 3b + 5c$ și $B = a + 8b - 4c$, avem: A se divide prin 13 dacă și numai dacă B se divide prin 13.

D. Săvulescu — G.M. nr. 6/1986

Soluție: $A = 2(a + 8b - 4c) - 13b + 13c = 2B - 13(c - b)$. Deci, dacă A se divide prin 13, rezultă că și B se divide prin 13, și reciproc.

52. Să se determine mulțimea numerelor prime de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10, știind că:

1) $a + b \in \{5, 7, 8, 10, 11\}$
2) $\overline{ab}$ divide 46 319 815

Mihai Doroftei — G.M. nr. 2/1984

Soluție: Din $a + b = 5$ rezultă $\overline{ab} \in \{23, 41\}$.
Din $a + b = 7$ rezultă $\overline{ab} \in \{43\}$.
Din $a + b = 8$ rezultă $\overline{ab} \in \{17, 43, 53, 71\}$.
Din $a + b = 10$ rezultă $\overline{ab} \in \{19, 37, 73\}$.
Din $a + b = 11$ rezultă $\overline{ab} \in \{29, 41, 83\}$.
Numerele $\overline{ab}$ care divid pe 46 319 815 sînt: 17, 19, 29 și 43.

53. Să se arate că toate numerele de forma $m = \overline{ab(a+b)ba}$, din sistemul zecimal, sînt divizibile cu 37; $0 < a + b \leq 9$.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 10/1981

Soluție: $m = 10^4a + 10^3b + 10^2(a + b) + 10b + a = 10101a + 1110b = 37(273a + 30b) = M37$.

54. Demonstrați că din 3 numere naturale pătrate perfecte se pot alege două care au diferența divizibilă cu 4.

N. Păuna — G.M. nr. 10/1981

Soluție: Fie n^2, m^2, p^2 cele 3 pătrate perfecte. În funcție de paritatea și imparitatea numerelor n, m, p, distingem mai multe cazuri:

1) $n = 2k$, $m = 2t$; $p = 2h$. Alegem $n^2 - m^2 = (2k)^2 - (2t)^2 = (2k - 2t)(2k + 2t) = 4(k - t)(k + t) = M4$.

2) $n = 2k$, $m = 2t + 1$, $p = 2h + 1$. Atunci alegem $m^2 -$

$-p^2 = (m-p)(m+p) = (2t+1-2h-1)(2t+1+2h+1) = 4(t-h)(t+h+1) = M4$ ş.a.m.d.

55. Să se arate că oricum am alege 7 numere pătrate perfecte distincte, există cel puţin două a căror diferenţă se divide prin 10.

Vasile Zidaru — G.M. nr. 2/1981

Soluţie: Orice număr ridicat la pătrat se termină prin una din cifrele: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Dacă 6 din pătrate perfecte s-ar termina prin 0, 1, 4, 5, 6, 9, al şaptelea pătrat perfect s-ar termina prin aceeaşi cifră cu unul dinainte. Deci diferenţa pătratelor acestor două numere se termină cu zero.

56. Găsiţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural de 7 cifre pătrat perfect ştiind că fiecare din aceste numere este divizibil cu 30.

Simion Petre — G.M. nr. 9/1986

R: $1\,020^2 = 1\,040\,400$; $3\,210^2 = 9,734\,400$

57. Să se afle cifrele a, b astfel încît numărul $A = \overline{aaaba}_{(10)}$ să fie divizibil cu 102.

Ion Bunghez — G.M. nr. 2/1986

Soluţie: $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, A se divide prin 2, rezultă $a \in \{2, 4, 6, 8\}$. A se divide prin 3, rezultă $4a + b = M3$.

a	2	2	2	4	4	4	6	6	6	6	8	8	8
b	1	4	7	2	5	8	0	3	6	9	1	4	7

din care 66 606 este divizibil cu 17, deci cu 102.

Mai sînt şi alte numere?

58. Să se determine mulţimea A avînd ca elemente divizorii proprii ai numărului $N = \overline{abb} + \overline{baa} + \overline{aba} + \overline{bab}$, scris în baza 10.

Francisc Csaki — G.M. nr. 5/1983

Soluţie: $N = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a+b)$. Cum $a, b \neq 0$ şi $a \neq b$, avem:
$(a+b) \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$,

atunci $A = \{2, 8, 4, 5, 6, \ldots, 3\,774\}$. În A nu intră toate numerele pînă la 8 774.

59. Determinați cvartetele (a, b, c, d) de numere naturale consecutive în ordinea $a < b < c < d$, știind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:

1) $(a^9 + b^9 + c^9 + d^9) : 54$
2) $a + b + c + d \leq 54$.

C.D. Mituțoiu — G.M. nr. 8/1985

R: (0, 1, 2, 8). Mai sînt și alte soluții?

60. Să se determine $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ astfel încît numărul $\overline{x0y}$ să fie divizibil cu $\overline{xy}$.

Dragoș Bumbăcea — G.M. nr. 5/1980

R: $x = 1, y = 5$; $105 : 15 = 7$. Mai sînt și alte soluții?

61. Aflați toate numerele naturale de 3 cifre, scrise în baza 10, care au cifra zecilor diferită de zero și sînt divizibile cu numărul format de ultimele sale două cifre scrise în aceeași ordine.

Vasile Ghizdavu — G.M. nr. 10/1985

R: 125; 225; 325; ...
120; 220; 320; ...

62. Să se determine cel mai mare număr natural de 3 cifre, scris în baza 10, cu cifrele distincte, știind că se divide cu fiecare cifră a sa.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 5/1985

R: 936

63. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ în sistemul zecimal care îndeplinesc simultan condițiile:

1) $\overline{abc}$ se divide cu $\overline{bc}$;
2) $0 < a \leq b \leq c$ sau $\leq 0 \leq c < b < a$

N. Păuna — G.M. nr. 10/1980

R: 125, respectiv 975. Mai sînt și alte numere?

Ind. 92 coala 1

Scanned with OKEN Scanner

64. Să se determine mulțimea numerelor de forma $\overline{abcd}$ știind că a divide pe $\overline{ab}$, $\overline{ab}$ divide pe $\overline{abc}$, $\overline{abc}$ divide pe $\overline{abcd}$ și $a \neq 1$, iar a, b, c și d pot fi și egale.

Gr. Ciocanea — G.M. nr. 12/1981

R: 2 000; 2 400; 2 600; 2800
8 000; 8 600; 8 900
4 000; 4 800
5 000; ...

65. Să se determine toate numerele de forma $\overline{aabb}$ divizibile cu numărul compus $\overline{ab}$ în a cărui descompunere se află factorul 3^{2k}, $k \in \mathbb{N}^*$.

Maria Vizuroiu — G.M. nr. 10/1987

R: $\overline{ab} = M9$; $\overline{ab} \in \{18, 27, 36, 45, \ldots, 90\}$
1 188; 4 455; 9 900

66. Să se afle perechile de numere de forma $\overline{888ab}$ și $\overline{cd}$, știind că $\overline{888ab}$ se divide la $\overline{cd}$, iar $\overline{888ab} + \overline{cd} = \overline{888ba}$.

Ruxandra Grigoraș — G.M. nr. 11 — 12/1987

Soluție: Din egalitate rezultă $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ba}$ sau $9(a - b) = \overline{cd}$. Deci $\overline{cd}$ este un multiplu de 9, adică $\overline{cd} \in \{18, 27, \ldots\}$ $24 + a + b = M9$, de unde avem:

1) $a + b + 6 = 9$ sau $a + b = 3$

Avem mai multe soluții:

$a = 0$ și $b = 3$, deci $88\,803 + 27 = 88\,830$ și $88\,803$ se divide prin 27, deci (88 803, 27).

$a = 1$ și $b = 2$, ...

2) $a + b + 6 = 18$ sau $a + b = 12$

Avem mai multe soluții:

$a = 4$, $b = 8$, deci $88\,848 + 36 = 88\,884$ și $88\,848$ se divide prin 36, deci (88 848, 36).

Mai sînt și alte perechi?

D. DIVIZIBILITATEA EXPRESIILOR NUMERICE

1. Să se demonstreze că numărul $N = 2^{33} - 2$ este divizibil cu 30.

Adonis Petrache — G.M. nr. 2/1981

Soluție: $N = 2(2^{32} - 1) = 2(2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2(2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = M30$

2. Să se arate, fără efectuarea operațiilor, că numărul $N = 1977^{263} + 1859^{264} + 1516^{264}$ este divizibil cu 10.

Vasile Bartha — G.M. nr. 8/1977

Soluție: 1977^{263} se termină cu 3, 1859^{264} se termină cu 1 și 1516^{264} se termină cu 6, deci N se termină cu zero.

3. Să se arate că numărul $N = 1\,971^5 + 1\,972^4 + 1\,973^3$ este un multiplu de 9.

Irina Niculescu, Marioara Iordănescu — G.M. nr. 10/1981

Soluție: $1\,971 = 3^3 \cdot 73 = M9$, deci $1\,971^5 = M9$
$1\,972^4 = (1\,971 + 1)^4 = M1971 + 1 = M9 + 1$
$1\,973^3 = (1\,971 + 2)^3 = M1971 + 8$, atunci
$N = M9 + (M9 + 1) + (M9 + 8) = M9$

4. Să se arate că numărul $N = 406^3 + 407^3 + \ldots + 414^3$ se divide cu 9.

Ioan Ciucur — G.M. nr. 11—12/1986

Soluție: $N = (405 + 1)^3 + (405 + 2)^3 + \ldots + (405 + 9)^3 =$
$= M9 + 1^3 + M9 + 2^3 + M9 + 3^3 + \ldots + M9 + 9^3 = M9 +$
$+ (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots 9^3) = M9 + \left[\frac{9 \cdot (9+1)}{2}\right]^2 = M9 +$
$+ (5 \cdot 9)^2 = M9.$

Se folosește identitatea $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

5. Să se arate expresia
$E = [(2x + 1)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3)] - (y + 1)(2^3 + 6^3 + 7^3)$ se divide cu 18 oricare ar fi numerele întregi x și y.

Ioan Bran — G.M. nr. 10/1987

Soluție: Utilizăm formula de mai înainte (vezi p. 4) $1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3 = 45^2$; calculăm direct $2^3 + 6^3 + 7^3 = 567$, atunci $E = 2x\,45^2 + 45^2 - 2 \cdot y \cdot 567 - 567 = 2 \cdot 9^2 \cdot 5^2x - 2 \cdot 3^4 \cdot 7 + 1\,458 = M18$

6. Să se arate că numărul $N = 3^{9+2} \cdot 4^{9+3} \cdot 3^{9+3} \cdot 4^{9+2}$ este divizibil cu 63.

Radu Cornea — G.M. nr. 2—3/1982

Soluție: $N = 3^9 \cdot 4^{11} \cdot 3^2 \cdot 4 + 3^9 \cdot 4^{11} \cdot 3^3 \cdot 4 = 3^2 \cdot 4^{11} \cdot 9 \cdot 7 = M63$

7. Să se arate că numărul $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{1988} + 5^{1989} + 5^{1990}$ se divide prin 71.

Lavinia Adriana Antonescu — G.M. nr. 7 — 8/1987

Soluție: $A = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) + 5^5(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) + \ldots + 5^{1985}(5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5)(1 + 5^5 + \ldots + 5^{1985}) = M71$ deoarece $5 + 5^2 + \ldots + 5^5 = 3\,905 = 71 \cdot 55$.

8. Să se demonstreze că numărul $P = 2^{13+2} \cdot 3^{13+3} \cdot 2^{13+2} \cdot 2^{13+2}$ este divizibil cu 180. Generalizare.

Felician Rebeleș — G.M. nr. 7/1977

Soluție: $P = 2^{13} \cdot 3^{13}(4 \cdot 27 + 8 \cdot 9) = 6^{13} \cdot 180$
$P = 2^7 \cdot 3^7(4 \cdot 27 + 8 \cdot 9) = 6^7 \cdot 180$

9. Să se calculeze restul împărțirii numărului
$M = 1\,111^{1111} + 2222^{2222} + \ldots + 9\,999^{9999}$ la 5

Andrei Boroș — G.M. nr. 7/1982

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Puterile de mai sus se termină cu cifrele 1, 4, 9, 6, 5, 6, 7, 6, 9, deși M se termină cu 7; atunci M împărțit la 5 dă restul 2.

10. Arătați că numărul $S = 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{100}$ se divide cu 210.

Petre Simion — G.M. nr. 9/1981

Soluție: Vezi exercițiul nr. 7 de mai sus!

11. Arătați că 1 985 divide pe $1\,984^{1984} - 1986$.

Alex. Toporan — G.M. nr. 2/1985

Soluție: $(1\,985 - 1)^{1984} - 1\,985 - 1 = M1985 + 1 - 1\,985 - 1 = M1985$

12. Să se arate că numărul $N = 1 \cdot 1\,978 + 2 \cdot 1\,978^2 + 3 \cdot 1\,978^3 + ... + 1\,976 \cdot 1\,978^{1976}$ este multiplu de 1 977.

Gabriel Nagy — G.M. nr. 4/1977

Soluție: $N = \sum_{k=1}^{1976} k \cdot 1\,978^k = \sum_{k=1}^{1976} k(1\,977 + 1)^k =$

$= \sum_{k=1}^{1976} k(M \cdot 1\,977 + 1) = \sum_{k=1}^{1976} k \cdot M \cdot 1\,977 + \sum_{k=1}^{1976} k =$

$M1977 + (1 + 2 + 3 + ... + 1\,976) = M1977 + \frac{(1 + 1\,976)\,1\,976}{2} =$

$= M1977 + M1977 = M1977$

13. Fie numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 1\,979 \cdot 1\,980$. Să se arate că A se divide cu 1980^{180}.

Victor Blanca — G.M. nr. 9—10/1982

Soluție: $1\,980^{180} = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11)^{180} = 2^{360} \cdot 3^{360} \cdot 5^{180} \cdot 11^{180}$. În descompunerea numerelor de la 1 la 1 980 în factori primi vor fi peste 990 factori de 2, peste 594 factori de 3, peste 396 factori de 5, peste 198 factori de 11. Deci A se divide cu $1\,980^{180}$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Să se determine toate numerele naturale n astfel încît suma $S = 11^1 + 11^4 + 11^7 + \ldots + 11^{3n+1}$ să se dividă cu 1 320.

Romulus Banu — G.M. nr. 9—10/1981

Soluție:

$S = 11(1 + 11^3) + 11^6 \cdot 11(1 + 11^3) + 11^{12} \cdot 11(1 + 11^3) + 11^{18} \cdot 11(1 + 11^3) + \ldots + 11^{3n+1}$

Dar $1 + 11^3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 37$ și $11(1 + 11^3) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 37 = A$. Însă $1\,320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$. Înlocuim pe A în S, avem:

$S = A + 11^6 A + 11^{12} A + 11^{18} A + \ldots + 11^{3n+1}$.

Dar $1 + 11^6 = M2$. Atunci $A(1 + 11^6) = M1320$.

Numărul total de termeni trebuie să fie un multiplu de 2 pentru ca să putem grupa și ultimul termen din S.

E. DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR NUMERICE

1. Se dă expresia $E(n) = (n + 1)^2(n + 2) + (n + 1)(n + 2)^2$ cu $n \in \mathbb{N}$ și se cere :

a) Să se arate că $E(n)$ se divide cu 6.

b) Să se determine n astfel încît $E(n) = 1\,710$.

Ion Voicu — G.M. nr. 2/1981

Soluție : a) $E(n) = (n + 1)(n + 2)(2n + 3)$

Dacă $n = 3k$, atunci $(n + 1)(n + 2) = M2$ și $2n + 3 = 6k + 3 = M3$, deci $E(n) = M6$.

Dacă $n = 3k + 1$, atunci $E(n) = (3k + 2)(3k + 3)(6k + 4) = 2 \cdot 3 \cdot (3k + 2)(k + 1)(3k + 1) = M6$

Dacă $n = 3k - 1$, atunci $E(n) = 3k(3k + 1)(6k + 2) = M6$

b) $(n + 1)(n + 2)(2n + 3) = 9 \cdot 10 \cdot 19$, de unde $n = 3$.

2. Să se arate că numărul $A = 4n^2 + 3n + 5$, $n \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 6 dacă 2 nu divide pe n și 3 nu divide pe n.

Wilhelm Bonė — G.M. nr. 10/1986

Soluție : Dacă 2 nu divide pe n, rezultă $n = 2k + 1$, atunci $A = 4(2k + 1)^2 + 3(2k + 1) + 5 = 2k + 12 = M2$

Dacă 3 nu divide pe n, rezultă două cazuri : sau $n = 3k + 1$ sau $n = 3k - 1$.

a) Dacă $n = 3k + 1$, atunci $A = 4(3k + 1)^2 + 3(3k + 1) + 5 = M3$

b) Dacă $n = 3k - 1$, rezultă analog $A = M3$

Deci A, fiind multiplu de 2 și de 3, este multiplu de 6.

3. Să se determine numerele întregi x pentru care numărul $a = x^8 + 9x^5 + 8x^2$ este divizibil cu 288.

Gh. Neagu — G.M. nr. 10/1987

R : $x = 2$

4. Să se arate că pentru orice m natural, expresia $E(m) = (m + 8^m)(m + 1)(m - 1)$ se divide prin 3.

Ioan Cuculescu — G.M. nr. 5/1977

R i $m = 8k$, $m = 8k + 1$, $m = 8k - 1$ sau $E(m) = M3$

5. Fie $n \in |N^*$ și numărul $A = 1 + n^2 + 8^n + n^4$. Să se arate că dacă n nu este multiplu de 8, atunci A se divide cu 6.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 12/1982

Soluție : Dacă n nu este multiplu de 8, atunci $n = 8k \pm 1$ și mai departe se procedează ca la problema 2.

6. Să se arate că pentru orice număr natural impar $(n > 1)$ numărul $E(n) = n^5 - n$ este divizibil 15.

Gh. Palincaș — G.M. nr. 10/1981

Soluție : $E(n) = n(n^4 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$; $(n - 1)n(n + 1) = M8$. Față de 5, numerele naturale se scriu $5k$, $5k \pm 1$, $5k \pm 2$ și se procedează ca la problema 1.

7. Dacă n este un număr întreg, atunci $n^2 + 1$ nu se divide prin 7.

x x x — G.M. nr. 5/1983

R i $M7$; $M7 \pm 1$; $M7 \pm 2$; $M7 \pm 8$, după înlocuire $E(n) \neq M7$

8. Să se arate că numărul $E(n) = 7n^4 + 14n^3 - 7n^2 - 14n$ se divide cu 168, pentru orice $n \in |N$.

Dumitra Pușcaș — G.M. nr. 7/1981

Soluție : $E(n) = 7(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$; $168 = 2^3 \cdot 8 \cdot 7$, dar $(n - 1)n(n + 1)(n + 2) = M8 \cdot 8 = M2^3 \cdot 8$

9. a) Să se arate că oricare ar fi $n \in |N$, numărul $n + 5$ nu divide numărul $A = n^2 + 10n + 24$;

b) Să se afle valorile lui $n \in |N$, pentru care numărul $n + 7$ divide numărul $B = n^2 + 14n + 40$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Există valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $\frac{B}{A}$ să fie natural?

Gh. Corina — G.M. nr. 8/1988

Soluție

a) $\frac{n^2 + 10n + 24}{n + 5} = n + 5 - \frac{1}{n + 5}$, cum $n + 5 = \pm 1$ rezultă $n \notin \mathbb{N}$, deci $n + 5$ nu divide pe A

b) $\frac{n^2 + 14n + 10}{n + 7} = n + 7 - \frac{9}{n + 7}$, $n = 2$

c) $\frac{B}{A} = 1 + \frac{4n + 16}{n^2 + 10n + 24}$, dar $n^2 + 10n + 2n > 4n + 16$, deci nu există valori $n \in \mathbb{N}$ pentru ca $\frac{B}{A}$ să fie natural.

10. Dacă a, $b \in \mathbb{Z}$ și dacă numerele 1979 și $a - b$ sînt prime între ele, iar numărul $a^5 - b^5$ se divide cu 1979, să se arate că numărul $(a + b)^5 - b^5$ se divide cu 1979.

Ion Mateescu — G.M. nr. 2/1979

Soluție $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ se divide cu 1 979, iar $a - b$ este prim cu 1 979, rezultă $a^2 + ab + b^2 = M1979$
$(a + b)^5 - b^5 = [(a + b)^3 - b^3] \cdot [(a + b)^3 + b^3] =$
$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2) \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot (a + 2b) = M1979$

11. Să se arate că $E = n^2m + nm^2 + n^2 + m^2 + 2mn + n + m$ este divizibil cu 2 pentru oricare m și $n \in \mathbb{N}$.

Soluție $E = (m + n)^2 + n(mn + 1) + m(mn + 1) =$
$= (m + n)(m + n + mn + 1) = (m + 1)(n + 1)(m + n)$
Se vor considera cele 4 cazuri de paritate și imparitate pentru m și n.

12. Oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, pătrat perfect, numărul $m = p^4 - p^3 - p^2 + p$ este divizibil cu 180.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 4/1986

Soluție: $p = k^2$, $m = k^8 - k^6 - k^4 + k^2 = (k-1)^2k^2(k+1)^2 \cdot (k^2+1$ $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$(k-1)k(k+1)$ divizibil prin $2 \cdot 3$, atunci $(k-1)^2k^2(k+1)$ este divizibil prin $2^3 \cdot 3^2$.

Față de numărul 5, avem : $k = M5$; $k = M5 \pm 1$; $k = M5 \pm 2$ Vezi problema nr. 2 !

13. Să se arate că numărul $A = n^1 + n^2 + n^3 + \ldots + n^{40}$ se divide cu 10 pentru $n \in |N$.

Alexandru Asimit — G.M. nr. 1/1988

Soluție:

$$A = \frac{n(n^{40}-1)}{n-1} = \ldots =$$

$$= \frac{(n-1)(n(n+1)(n^4+n^3+n^2+n+1)(n^4-n^3+n^2-n+1)(n^{10}+1)(n^{20}+1)}{n-1}$$

$n(n+1) = M2$; $A = M2$; apoi față de numărul 5 toate numerele naturale pot avea una din formele $5k$; $5k \pm 1$; $5k \pm 2$ și se arată că $A = M5$, deci $A = M2 \cdot 5 = M10$.

14. Să se găsească cifrele m și n, diferite de zero, astfel încît numărul $\overline{11nmn}$ să fie divizibil cu $2^m \cdot 3^n$.

Maria și Nicolae Vizuroiu — G.M. nr. 10/1986

R : $m = 3$, $n = 2$; $11\,232 = 72 \cdot 156$

Mai sînt și alte soluții ?

15. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere întregi care nu sînt divizibile cu 3 și $n \in |N$, atunci

$x_1^{2n} + x_2^{2n} + \ldots + x_n^{2n} - n$ se divide cu 3.

Ion Voicu — G.M. nr. 10/1980

Soluție: Dacă x_1 nu se divide cu 3, atunci $(x_1^n - 1)(x_1^n + 1)$ se divide cu 3. Analog pentru celelalte numere. Atunci avem : $x_1^{2n} + x_2^{2n} + \ldots + x_n^{2n} - n = (x_1^{2n} - 1) + (x_2^{2n} - 1) + \ldots + (x_n^{2n} - 1) = (x_1^n - 1)(x_1^n + 1) + (x_2^n - 1)(x_2^n + 1) + \ldots + (x_n^n - 1)(x_n^n + 1) = M3$

Scanned with OKEN Scanner

16. Dacă $p_i (i = \overline{1,12})$ sînt numere prime mai mari decît 5 sau egale cu 5, atunci numărul

$N = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{12}^2$ se divide prin 12.

Ilie Diaconu — G.M. nr. 9/1987

Soluție: Deoarece p_i este prim, atunci $p_i = M6 \pm 1$ sau $p_i^2 = M3 + 1$, deci $N = M3 + 12 = M3$.

Deoarece p_i este prim, atunci $p_i = M_4 \pm 1$ sau $p_i^2 = M4 + 1$, deci $N = M4 + 12 = M4$. Deci $N = M12$

Scanned with OKEN Scanner

F. DIVIZIBILITATEA EXPONENȚIALELOR NUMERICE

1. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ expresia $E = 10^n + 62$ este divizibilă cu 18.

Viorel Gh. Mocanu — G.M. nr. 5/1983

Soluție: $E = 10 \ldots 062$, cu $(n-2)$ zerouri; $18 = 2 \cdot 9$; E se divide prin 2 și prin 9, deci se divide prin 18.

2. Să se demonstreze că toate numerele de forma $72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$, $n \in \mathbb{N}$, se divid prin 15.

A. Nebunescu — G.M. nr. 8/1983

Soluție: Numărul se mai poate scrie și astfel: $8^n \cdot 9^n + 8^n \cdot 9^n \cdot 6 + 8^n \cdot 9^n \cdot 8 = 15 \cdot 8^n \cdot 9^n$, deci se divide prin 15 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Să se arate că numerele de forma
$$6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}$$
unde $n \in \mathbb{N}$, sînt numere divizibile prin 13.

Dumitru Minea — G.M. nr. 2—3/1982
R: Vezi problema nr. 2!

4. Să se arate că numerele de forma $63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$, cu $n \in \mathbb{N}$, se divid prin 13.

Elena Matei — G.M. nr. 8/1984
R: Vezi problema nr. 2!

5. Dacă $n \in \mathbb{N}$, să se demonstreze că:
$A = 7^n \quad 3^{n+1} + 3^n \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 21^n$ este divizibil cu 17
$B = 5^n \cdot 7^{n+1} + 7^n \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^n$ este divizibil cu 29.

Ion Predescu — G.M. nr. 10/1987
R: Vezi problema nr. 2!

6. Arătați că numerele de forma $2^n \cdot 5^{n+2} \cdot 7^3 - 8\,575$, unde n, sînt divizibile cu 63.

Emilia Popescu — G.M. nr. 7—8/1987

Soluție : $2^n \cdot 5^n \cdot 5^2 \cdot 7^3 - 5^2 \cdot 7^3 = 5^2 \cdot 7^3(10^n - 1) = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 99\ldots 99$, se divide prin $7 \cdot 9$.

7. Arătați că numerele de forma $5^{n+3} \cdot 2^n - 125$, unde n, sînt divizibile cu 45.

Constantin Coandă — G.M. 7/1988

R : Vezi problema nr. 6 !

8. Să se arate că pentru n număr natural nenul, $A = 2^{n+1} \cdot 5^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 5^n \cdot 3^{n+4}$ este divizibil cu 1 986.

Vasile Negoiță — G.M. nr. 6/1986

R : Vezi problema nr. 2 !

9. Să se arate că numărul $A = 7^{n+2} \cdot 3^n - 49$, $n \in \mathbb{N}^*$, este divizibil cu 490.

Cornel Urs — G.M. nr. 8/1982

Soluție : $A = 49(21^n - 1)$; $21^n - 1 = M10$, deci A se divide prin 490.

10. Să se arate că numărul $N = 2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{n+3} - 22 \cdot 3^n$ este divizibil cu 18.

Gh. Tutulan — G.M. nr. 3/1978

Soluție : $N = 8 \cdot 16^n + 5 \cdot 3^n = 8(13 + 3)^n + 5 \cdot 3^n = 8(M13 + 3^n) + 5 \cdot 3^n = M13 + 8 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n = M13 + 18 \cdot 3^n = M18$.

11. Să se determine forma numerelor naturale n astfel ca expresia $E(n) = (7^n + 1)(8^n - 1)(9^n + 1)$ să se dividă cu 280.

Romulus Banu — G.M. nr. 4/1981

Soluție : Dacă a și b sînt numere reale pozitive, avem identitățile următoare :

1) $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 + \ldots + b^{2k}) = M(a + b)$, unde $2k + 1$ este număr impar ;

2) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) = M(a - b)$ unde $n \in |N^*$, poate fi și par și impar.

$7^n + 1 = (7 + 1)(7^{n-1} - 7^{n-2} + \ldots) = M8$

$9^n + 1 = (9 + 1)(9^{n-1} - 9^{n-2} + \ldots) = M10$

$8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \ldots) = M7$, $\forall n \in |N^*$

Primele două descompuneri pot avea loc dacă $n = 2k + 1$, $k \in |N$ și $E(n) = M8 \cdot 5 \cdot 7$

12. Să se determine restul împărțirii numărului $53^{2n} + 53^n + 1$, $n \in |N$, prin 13.

Dragomir Costea — G.M. nr. 10/1978

Soluție: $53 = M13 + 1$ și $(M13 + 1)^{2n} = M13 + 1$; $(M13 + 1)^n = M13 + 1$, atunci numărul se scrie $53^{2n} + 53^n + 1 = (M13 + 1)^{2n} + (M13 + 1)^n + 1 = M13 + 3$. Deci restul este 3.

13. Să se demonstreze că numărul $N = 2^{n+3} \cdot 5^n \cdot 11^{n+1} + 2^{3n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 7$, unde n este un întreg pozitiv, se divide la 43.

Ilie Florescu — G.M. nr. 6/1981

Soluție: $2^n[55^n \cdot 44 + 12^n \cdot 42] = 2^n[55^n(43 + 1) + 12^n(43 - 1)] = 2^n[M43 + 55^n - 12^n] = 2^n[M43 + M43] = M43$ deoarece $55^n - 12^n = (55 - 12)(55^{n-1} + 55^{n-1} \cdot 12 + \ldots + 12^{n-1})$ are loc pentru orice $n \in |N^*$.

14. Fie n număr natural impar. Să se arate că numărul $A = 5^{2n+3} + 5^2 \cdot 2^{2n+2} + 25 \cdot 4^n + 5^{2131} + 33^{1217}$ se divide prin 29.

Gh. Tutulan — G.M. nr. 1/1982

Soluție: $A = 125(5^{2n} + 2^{2n}) + 25^{1217} + 33^{1217} = 125(25^n + 4^n) + (29 - 4)^{1217} + (29 + 4)^{1217} = 125(25^{2k+1} + 4^{2k+1}) + M29 - 4^{1217} + (29 + 4)^{1217} = 125 \cdot M29 + M29 + M29 = M29$

15. Să se demonstreze că numărul $N = 2^{4n+5} \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5$, unde n este un întreg pozitiv, se divide cu 31.

Ilie Florescu — G.M. nr. 7/1979

Vezi problema nr. 14!

16. Să se arate că numerele de forma $7^{3k+2} \cdot 11^{3k+1} \cdot 5^{2k} + 589$; $k \in \mathbb{N}$, se divid la 1 078.

D. Săvulescu — G.M. nr. 8/1982

Soluție: $1\,078 = 2 \cdot 7^2 \cdot 11$. Numărul se mai scrie: $7^2 \cdot 11[(7 \cdot 11 \cdot 5)^{3k} + 1] = 589(385^k + 1)$, dar $385^{3k} + 1 = M2$; deci numărul se divide la 1 078.

17. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul $2^{2n+1} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{n+1} + 4^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^n$ se divide cu 1 980.

N. Ivăşcheşcu — G.M. nr. 7/1980

R: Vezi problema nr. 2;

18. Să se determine numerele naturale nenule a, b astfel încît $a^a \cdot b^b \cdot (a+b)(a+b+ab)$ să fie cel mai mic număr divizibil cu 1 980.

Marica Ştefan — G.M. nr. 2/1981

R: $a = 2$, $b = 3$

19. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $84^{(2n-1)^n} + 86^{1980}$ este divizibil cu 10.

Nicolae Pintea — G.M. nr. 2 — 3/1982

Soluție: Numărul $(2n-1)^n$ este impar, de forma $M2n \pm 1$. Atunci $84^{(2n-1)^n}$ se termină prin 4, iar 86^{1980} se termină prin 6, deci numărul dat se termină prin zero, adică este divizibil cu 10.

20. Să se arate că $E = (137^n - 1)^{732} - 2(1 - 137^n)^{731} + (1 - 137^n)^{730}$ unde $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, este divizibil cu $136^{730} \cdot 137^{2n}$

I. C. Ligor — G.M. nr. 2/1977

Soluție: $E = (137^n - 1)^{732} + 2(137^n - 1)^{731} + (137^n - 1)^{730} = (137^n - 1)^{730}[(137^n - 1) + 1]^2 = (137 - 1)^{730} \cdot [137^{n-1} + \ldots + 1^{730}] \cdot 137^{2n} = M136^{730} \cdot 137^{2n}$

21. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $A = 11^{2n+2} \cdot 13^{2n+1} \cdot 19^{2n+1} \cdot 11^{2n+2} \cdot 13^{2n} \cdot 19^{2n+2} - 11^{2n+1} \cdot$

Scanned with OKEN Scanner

$\cdot 18^{2n+1} \cdot 19^{2n+2}$ se divide cu numerele prime mai mici decît 20, cu excepția lui 2 și lui 17.

Grigore Preoteasa — G.M. nr. 8/1983

R: $A = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot \cdot 11^{2n} \cdot 18^{2n} \cdot 19^{2n}$

22. Să se determine mulțimea

$$M = \{ n \mid n \in \mathbb{N},\ 25 \text{ divide } 2^{n+1}(2^{n-1} + 3^n) + 3^{2n} \}.$$

Domnica și Marin Grigorescu — G.M. nr.4/1982

Soluție: Expresia se mai scrie astfel:
$(2n)^2 + 2 \cdot 2^n \cdot 3^n = (3^n)^2 = (2^n + 3^n)^2$. Ca să se dividă prin 25 trebuie ca $(2^n + 3^n)$ să se dividă prin 5, adică $n = 2k + 1$; atunci $M = \{ 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k + 1, \ldots \}$.

23. Să se arate că oricare ar fi numărul natural n, numărul $A = 3^n + 7^n$ este divizibil cu 2. Pentru care dintre numerele n, numărul A este divizibil și cu 5?

Ion Davidică — G.M. nr. 12/1978

R: Pentru $n = 2k + 1$ numărul A se divide și cu 5.

24. Să se arate că numărul
$M = 12^n + 21^{2n} + 34^{3n} + 43^{4n} + 56^{5n} + 65^{6n} + 78^{7n} + 87^{8n} +$
$+ 100^{9n} + 109^{10n} + 122^{11n}$ este multiplu de 11, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Mariana Vava — G.M. nr. 10/1980

Soluție:
$M = (11 + 1)^n + (22 - 1)^{2n} + (33 + 1)^{3n} + \ldots + (121 + 1)^{11n} =$
$= M11 + 11 = M11$

25. Să se arate că numărul
$a = [25^n(7^n + 1) - \sqrt[3]{343^n} - 1]^n$ este divizibil cu 2^{4n}, pentru orice $n \in \mathbb{N} - \{ 0, 1 \}$.

Aurel Adam — G.M. nr. 8/1984

Soluție: $a = [(7^n + 1)(5^{2n} - 1)]^n = (7^n + 1)^n \ (5^n - 1)^n \cdot$
$\cdot (5^n + 1)^n = M2^{4n}$.

Scanned with OKEN Scanner

26 Să se găsească cele mai mici numere naturale a și x ($a \neq 1$, $x \neq 0$) astfel ca $a^x - 1$ să fie divizibil cu 1 302.

D. Săvulescu — G.M. nr. 8/1982

R! $a = 1\,303$, $x = 1$

27. Fie n un număr întreg care nu se divide cu 3. Să se demonstreze că
$E = (7n^2 + 3n + 2)(5^{3n} - 3^{2n} \cdot 2^{3n}) \vdots 159$.

Gh. Popescu — G.M. nr. 10/1986

Soluție: Pentru $n = 3k \pm 1$ expresia $7n^2 + 3n + 2 = M3$ și $5^{3n} - 3^{2n} \cdot 2^{3n} = 125^n - 72^n = M53$. Deci $E \vdots 159$

28. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{abba}$ (scrise în baza 10, cu $a > 1$, $b > 1$, $a \neq b$), știind că sînt divizibile cu b^a.

Daniel Cojocaru

R! $a = 4$, $b = 2$

29. Să se arate că numărul $N = (n^2 + n + 3)^{n^2+n+2} - 1$ $n \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 8.

Damian Marinescu — G.M. nr. 4/1982

Soluție: $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$ este număr par. Notăm $n^2 + n + 2 = 2p$ $N = (2p + 1)^{2p} - 1 = [(2p + 1)^p + 1] \cdot [(2p + 1)^p - 1] = [(2p + 1)^p + 1] \cdot [(2p + 1) - 1] \cdot [(2p + 1)^{p-1} + (2p + 1)^{p-2} + \ldots + 1] = [(2p + 1)^p + 1] \cdot 2p \cdot \sum_{k=1}^{p-1} (2p + 1)^k$

Cazul I. Dacă $p = 2l + 1$, atunci $(2p + 1)^p + 1 = M2$, deci
$N = M2 \cdot 2 \cdot 2l \cdot \sum_{k=1}^{p-1} (2p + 1)^k = M8$

Cazul II. Dacă $p = 2h + 1$, atunci $(2p + 1)^p + 1 = (4h + 1)^{2h+1} + 1 = [4(h + 1) - 1]^{2h+1} + 1 = M4 + (-1)^{2h+1} + 1 = M4 - 1 + 1 = M4$, deci $N = M4 \cdot 2 \cdot (2h + 1) \cdot \sum_{k=1}^{p-1} (2p + 1)^p = M8$

30. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și expresia $E = a \cdot b^{c(a+b)} - c$. Dacă $a + b = c - 1$, atunci E se divide cu $(b + 1)$

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 4/1983

Soluție: Din $a + b = c - 1$ rezultă $c = a + b + 1$, atunci E devine, $E = ab^{c(c-1)} - a - b - 1 = a[b^{c(c-1)} - 1] - (b + 1)$. Dar $c(c - 1) = M2$, atunci $b^{c(c-1)} - 1$ se divide prin $(b + 1)$. Deci $E = a \cdot M(b + 1) - (b + 1) = M(b + 1)$, adică E se divide cu $(b + 1)$.

31. Să se arate că expresia $E = (n + k)^{m+2} + (n + k + 1)^{2m+1}$ se divide prin $n^2 + (2k + 1)n + k^2 + k + 1$, unde $n, m, k \in \mathbb{N}^*$.

Radu Ghenghiu — G.M. nr. 7/1982

Soluție: Notăm $h = n^2 + (2k + 1)n + k^2 + k + 1 = n^2 + k^2 + 2nk + n + k + 1$. Expresia E se mai poate scrie succesiv astfel: $E = (n + k)^2 (n + k)^m + (n + k + 1)[(n + k + 1)^2]^m = (n^2 + k^2 2nk)(n + k)^m + (n+k+1)[(n^2 + k^2 + 2nk + n + k + 1) + (n + k)]^m = (n^2 + k^2 + 2nk)(n + k)^m + (n + k + 1)[h + (n + k)]^m = (n^2 + k^2 + 2nk)(n + k)^m + (n + k + 1)[h^m + M(n + k)] = (n^2 + k^2 + 2nk)M(n + k) + (n + k + 1)h^m + (n + k + 1) M (n + k) = (n^2 + k^2 + 2nk + n + k + 1) M (n + k) + (n + k + 1)h^m = hM(n + k) + (n + k + 1)h^m = Mh$. Deci E se divide prin h.

32. Să se arate că numărul $N = 3^{m-1}(25^m \cdot 11^{2n+1} - 55^{2n}) + m \cdot n(m^8 - n^8)$ se divide prin 30, oricare ar fi m și n numere naturale.

Gh. Tutulan — G.M. nr. 8/1983

Soluție: Numărul se poate scrie succesiv astfel: $N = 3 \cdot 3^m \cdot (55^{2n} \cdot 11 - 55^{2n}) + mn(m^4 - n^4)(m^4 + n^4) = 3 \cdot 3^m \cdot 55^{2n} \cdot 10 + mn(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)(m^4 + n^4) = M30 + P$, unde P am notat produsul $P = mn(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)(m^4 + n^4)$.

Față de numărul 2, m și n se scriu astfel: $m = 2k$; $m = 2k + 1$; $n = 2l$; $n = 2l + 1$.

Considerînd toate variantele, se demonstrează că $P = M2$.

Față de numărul 3, m și n se scriu $m = 3k$, $m = 3k \pm 1$ și $n = 3l$, $n = 3l \pm 1$. Analog se demonstrează că $P = M3$.

Față de numărul 5, m și n se scriu $m = 5k$, $m = 5k \pm 1$; $m = 5k \pm 2$ și $n = 5\,1$, $n = 5\,1 \pm 1$; $n = 5\,1 \pm 2$. Idem ca mai înainte.

Deci P se divide prin produsul $2 \cdot 3 \cdot 5$. În concluzie, N se divide prin 30.

33. Să se găsească toate numerele de forma $\overline{xyz}_{(10)}$ în condițiile următoare:

10 divide $1\,977^x - 1$; 5 divide $1\,978^y + 3$; 10 divide $1\,982^z - 132$.

V. Tucă — G.M. nr. 1/1983

Soluție: x, y, z sînt cifre. $1\,977^x - 1$ se divide prin 10 dacă $1\,977^x$ se termină prin 1 și va avea loc cînd $x \in \{4,8\}$.

$1\,978^y + 3$ se divide prin 5 dacă $1\,978^y$ se termină prin 2 și va avea loc cînd $y \in \{3, 7\}$.

$1\,982^z - 132$ se divide prin 10 dacă $1\,982^z$ se termină prin 2 și va avea loc cînd $z \in \{1, 5, 9\}$.

Numerele de forma $\overline{xyz}_{(10)}$ sînt: 431; 435; ...

34. Se dau numerele: $A = 2(10^{75} - 1)$ și $B = 3(10^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Care este prima și ultima cifră a acestor numere și cîte cifre de 9 se folosesc în scrierea fiecăruia?

2) Din cîte cifre este format fiecare număr?

3) Să se arate că numărul $A + B$ se divide cu 5.

4) Pentru $n = 75$, să se calculeze $B - A$, $B : A$ și $A : B$.

Gh. Bucur — G.M. nr. 1/1980

Soluție:

1) $A = \underbrace{199 \ldots 998}_{74 \text{ cifre de } 9}$

2) $B = \underbrace{299 \ldots 997}_{n-1 \text{ cifre de } 9}$

2) A este format din 76 cifre, iar B este format din $n + 1$ cifre.

3) $A + B$ se termină prin 5, deci este divizibil.

4) $B - A = 10^{75} - 1$; $B : A = 3 : 2$

Scanned with OKEN Scanner

35. Se dau numerele $a = 27 \cdot 5^{3n+3} + 343 \cdot 2^{3n-3}$; $b = 9 \cdot 5^{2n+4} + 49 \cdot 2^{4n-2} - 21 \cdot 2^{2n-1} \cdot 5^{n+2}$.

Să se arate că a se divide cu b pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Gr. Ciocanea — G.M. nr. 2/1978

Soluție:

$$a = (3 \cdot 25 \cdot 5^n)^3 + \left(\frac{7 \cdot 4^n}{2}\right)^3 = \left(3 \cdot 25 \cdot 5^n + \frac{7 \cdot 4^n}{2}\right)\left(3^2 \cdot 25^2 \cdot 5^{2n} - 3 \cdot 25 \cdot 5^n \cdot \frac{7 \cdot 4^n}{2} + \frac{7^2 \cdot 4^{2n}}{2^2}\right)$$

$$b = 3^2 \cdot 25^2 \cdot 5^{2n} - 3 \cdot 25 \cdot 5^n \cdot \frac{7 \cdot 4^n}{2} + \frac{7^2 \cdot 4^{2n}}{2^2}$$

Deci b divide pe a.

36 Să se arate că fracția

$$F = \frac{5^{2n+1} + 2^{n+2} + 4 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n}{2^3 \cdot 2^{2n+1} + 7 \cdot 27^n}$$ se simplifică cu 23, $(n \in \mathbb{N})$.

N. Pop — G.M. nr. 9/1979

37 Să se arate că fracția

$$F = \frac{7^{2n+1} + 2^{3n+3} + 2 \cdot 2^{3n}}{3^{2n+1} + 23 \cdot 43^n}$$ se simplifică cu 41, oricare ar fi numărul n natural.

Maria Dobrilă — G.M. nr. 1/1970

G. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN AL NUMERELOR NATURALE

1. Să se determine perechile de numere care să satisfacă simultan condițiile:

a) produsul cuburilor lor este 884 736;

b) cel mai mare divizor comun al lor este 4.

Petrică I. Matei — G.M. nr. 4/1981

Soluție: Condiția a) devine: $a^3b^3 = 2^{15} \cdot 3^3 = (2^3 \cdot 3)^3 \cdot (2^2)^3$, de unde $ab = (2^3 \cdot 3) \cdot (2^2)$ sau $ab = (2^2 \cdot 3) \cdot (2^3)$.

Din condiția b) avem: (24, 4) și (12, 8).

S-a notat cu (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x și y.

2. Să se găsească numerele naturale a și b știind că c.m.m.d.c. al lor este 15, iar produsul lor este 3 150.

x x x — G.M. nr. 5/1977

Soluție: Din $(a, b) = 15$, rezultă $\left(\frac{a}{15}, \frac{b}{15}\right) = 1$. Notăm $\frac{a}{15} = a_1$ și $\frac{b}{15} = b_1$. Rezultă $a = 15a_1$ și $b = 15b_1$; atunci condiția $(a, b) = 15$ devine $(a_1, b_1) = 1$ și $ab = 3\,150$ devine $a_1b_1 = 14$, de unde obținem două soluții:
$a_1 = 1$, $b_1 = 14$ și $a_1 = 2$, $b_1 = 7$. Înlocuind, avem: $a = 15$, $b = 210$ și $a = 30$, $b = 105$.

3. Să se găsească numerele naturale a și b în fiecare din următoarele două situații:

1) $(a, b) = 18$; $a + b = 180$

2) $(a, b) = 8$; $ab = 1\,344$

S-a notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Maria Cozma — G.M. nr. 8/1985

R: Vezi problema nr. 2!

1) $a = 18$, $b = 162$; $a = 54$, $b = 126$; $a = 126$, $b = 54$; $a = 162$, $b = 18$

2) $a = 8$, $b = 168$; $a = 24$, $b = 56$; $a = 56$, $b = 24$, $a = 168$, $b = 8$

4. Să se găsească două numere, știind că produsul lor este 7 220, iar c.m.m.d.c. al lor este 19.

El. Ignat — G.M. nr. 2/1973

R: $a = 95$, $b = 76$

5. Câturile împărțirilor succesive pentru a afla cel mai mare divizor comun a două numere sînt 3 numere pare consecutive a căror sumă este 12. Cel-mai mare divizor comun al celor două numere este 15. Să se afle cele două numere.

Antoneta Maftei — G.M. nr. 6/1979

Soluție: Scriem algoritmul lui Euclid:

$a = bq + r$; $b = rq_1 + r_1$; $r = r_1q_1 + 0$

Dar q, q_1, q_2 sînt numere pare consecutive a căror sumă este 12. Notînd cu $2n = q$, $2n + 2 = q_1$, $2n + 4 = q_2$, avem: $2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 12$, $n = 1$, deci $q = 2$, $q_1 = 4$, $q_2 = 6$. Algoritmul devine $a = b \cdot 2 + r$; $b = r \cdot 4 + r_1$; $r = r_1 \cdot 6$. Însă $(a, b) = 15 = r_1$, atunci $r = 15 \cdot 6$, adică $r = 90$, $b = 375$, $a = 840$

6. Să se determine numerele N_1 și N_2 știind că c.m.m.d.c. al lor este cel mai mare număr de 3 cifre divizibil cu 45 și că $7N_1 = 11N_2$.

N. Prundeș — G.M. nr. 8/1978

R: $N_1 = 10890$, $N_2 = 6\,930$

7. Să se arate că c.m.m.d.c. al numerelor $\overline{xyxyxy}$, $\overline{xyyxyy}$, $\overline{xxyxxy}$ scrise în baza 10 se divide cu 91.

Remus Vrabie — G.M. nr. 4/1979

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $\overline{xyxyxy} = 91 \cdot 1110x + 91 \cdot 111y = M91$
$\overline{xyyxyy} = 91 \cdot 1100x + 91 \cdot 121y = M91$
$\overline{xxyxxy} = 91 \cdot 1210x + 91 \cdot 11y = M91$

8. Să se arate că c.m.m.d.c. al numerelor $\overline{xyxyxy}$, $\overline{xyyxyy}$, $\overline{xxyxxy}$ (scrise în baza 10) se divide cu 7 și 13.

Iuliu Urs — G.M. nr. 10/1986

R: Vezi problema nr. 7!

9. Cel mai mic multiplu comun a două numere mai mari decît 1 este 667. Să se afle numerele.

I. Joldiș — G.M. nr. 1/1977

R: a = 23, b = 29

10. Într-o tabără se găsește un anumit număr de copii. Așezați în rînd cîte 2, rămîne un copil în plus. Așezați în rînd cîte 3, rămîne tot un copil în plus. De asemenea, rămîne un copil în plus și dacă sînt așezați în rînduri cîte 4, 5 și 6. Rîndurile sînt completate numai atunci cînd sînt așezați cîte 7. Să se afle numărul de copii care se găsește în tabără, știind că el este minim.

Gabriela Gheorghe — G.M. nr. 2/1977

Notăm cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b astfel: [a, b].

Soluție: [2, 3, 4, 5, 6] = 60. Încercăm în mod succesiv toate numerele de forma M60 + 1 care să fie divizibil cu 7. Găsim 5 · 60 + 1 = 301. Acest număr răspunde problemei.

11. Pentru festivitatea de deschidere a noului an școlar, elevii unei clase au cumpărat flori. Făcînd buchete de cîte 3 flori le-au mai rămas două. La fel și atunci cînd au făcut buchete de cîte 7 flori. În sfîrșit, făcînd buchete de cîte 5 flori, le-au mai rămas 3. Cîte flori au cumpărat elevii, știind că numărul lor este cuprins între 100 și 200.

Gabriela Gheorghe — G. M. nr. 3/1978

R: 128 (Vezi problema nr. 10)!

Scanned with OKEN Scanner

12. Aflați numărul elevilor clasei a V-a știind că, dacă îi așezăm în rînd cîte 2, cîte 3, cîte 4 sau cîte 6, rămîne de fiecare dată un elev singur.

Dacă îi așezăm în rînd cîte 7, rămîne un rînd cu 2 elevi.

Concurs Suceava — G.M. nr. 3/1988

R : 37. Vezi problema nr. 10 !

13. Să se determine 10 numere naturale de 4 cifre care să fie divizibile simultan cu 2, 3, 4, 5, 9, 25.

Neculai Dinu Ureche — G.M. nr. 11—12/1986

R : 900 ; 1 800 ; 2 700 ; 4 500 ; ...

14. Să se determine numerele naturale a, b, c știind că $88a = 9b$ și $11c = 2a$, iar c.m.m.m.c. al lor este 60 984.

I. Albescu — G.M. nr. 9/1978

Soluție : $[a, b, c] = 60\,984$; $[a, b, c] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 7$; iar $a = M3^2$, $b = M2^3 \cdot 11$, $c = M2$, $a = M11$ din cele două egalități ale problemei. Numărul 7 intră în componența fiecărui număr a, b, c. Deci $a = M3^2 \cdot 11 \cdot 7$; $b = 2^3 \cdot 11$; $c = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ sau $a = 693$; $b = 968$; $c = 126$.

15. Să se afle numerele naturale a, b, c și m știind că $2a = 3b$; $6c = 5a$; $(a, b, c) = 1$ și $[a, b, c] = m$.

C. Hânsă — G.M. nr. 6/1987

R : $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$.

16. Să se determine numerele naturale a și b cu proprietățile : $(a, b) = 28$ și $[a, b] = 784$.

Felicia Rapaport ! G. M. nr. 10/1985

Soluție : Se cunoaște relația $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$. Din $(a, b) = 28$ rezultă $\left(\frac{a}{28}, \frac{b}{28}\right) = 1$. Notăm : $\frac{a}{28} = a_1$; $\frac{b}{28} = b_1$. Înlocuind în relația de mai sus, obținem $a_1 \cdot b_1 = 28$; $(a_1, b_1) = 1$, de unde $a_1 = 1$, $b_1 = 28$ și $a_1 = 4$, $b_1 = 7$ sau $a = 28$, $b = 784$ și $a = 112$, $b = 196$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Să se determine perechile de numere de cîte două cifre știind că c.m.m.d.c. al lor este un număr prim și acesta este de 20 ori mai mic decît c.m.m.m.c. al celor două numere.

I. Fota — G.M. nr. 1/1986

Soluție: $20 \cdot (a, b) = [a, b]$. Dar $(a, b] = a \cdot b \vdots [a, b]$ deci $20 \cdot (a, b) = ab \vdots (a, b)$ sau $(a, b)^2 = ab \vdots 20$. Dacă (a, b) este prim, atunci $(a, b)^2$ este tot prim, deci $a \cdot b \vdots 20$ este prim. Cum a și b sînt cifre, se verifică numai pentru: $a = 4$, $b = 5$; $a = 1$, $b = 20$ sau invers.

18. Determinați 3 numere naturale a, b, c știind că $(a, b) = 4$; $(a, c) = 6$; $(b, c) = 10$.

Lajos Biro — G.M. nr. 11—12/1986

Soluție: Dacă $(a, b) = 4$ și $(a, c) = 6$, atunci $a = [4, 6] = 12$. Analog $b = 20$, $c = 30$.

19. Notăm cu (a, b) și $[a, b]$ c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a numerelor $a, b \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $[a, b] + (a, b) \geq a + b$.

Daniel Anca — G.M. nr. 1/1980

Soluție: Dacă $d = (a, b)$, atunci $1 = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$. Notăm $\frac{a}{d} = a_1$ și $\frac{b}{d} = b_2$, deci $a = da_1$ și $b = db_1$, unde $(a_1 b_1) = 1$ și

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)} = \frac{d^2 \cdot a_1 \cdot b_1}{d \cdot (a_1, b_1)} = d \cdot a_1 \cdot b.$$

Înlocuind în egalitate, obținem $da_1b_1 + d \geq d(a_1 + b_1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_1b_1 + 1 \geq a_1 + b_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (a_1 - 1)(b_1 - 1) \geq 0$ inegalitate adevărată, deci și inegalitatea din enunț este adevărată.

20. Se știe că produsul dintre două numere este egal cu produsul dintre c.m.m.m.c. și c.m.m.d.c. al lor.

Ce se poate afirma în cazul a trei sau patru numere?

x x x — G.M. nr. 8/1978

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

$$[a, b, c] = [[(a,b), c]] = \frac{\frac{ab}{(a,b)} \cdot c}{([a,b], c)} = \frac{abc}{(a,b)[(a,c),(b,c)]} =$$

$$= \frac{abc}{(a,b) \cdot \frac{(a,c) \cdot (b,c)}{((a,c), (b,c))}} = \frac{abc((a,c), (b,c)}{(a,b) \cdot (a,c) \cdot (b,c)} = \frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$$

Deci $abc = \dfrac{a,b,c \cdot (a, b) \cdot (a, c) \cdot (b,c)}{(a, b, c)}$

Scanned with OKEN Scanner

H. DIVIZORI PROPRII ȘI IMPROPRII

1. Să se afle cel mai mic număr natural n care are exact 15 divizori.

Ioan Filip — G.M. nr. 9/1986

Soluție: Dacă numărul N are o descompunere în factori de forma $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$, atunci numărul divizorilor săi este $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_s + 1)$. Pentru a avea 15 divizori, rezultă că: $(a_1 + 1)(a_2 + 1) = 3 \cdot 5$, de unde $a_1 = 2$ și $a_2 = 4$.

Pentru a obține cel mai mic număr natural n vom ridica numărul prim 2 la cel mai mare exponent, adică 4, pe următorul număr prim 3 la următorul exponent 2. Deci $n = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

2. Să se găsească cel mai mic număr natural care are exact 30 divizori.

Ștefan Kleitsch — G.M. nr. 5/1977

R: $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$

3. Să se afle cel mai mic număr natural care are exact 42 de divizori.

Ștefan Sabău — G.M. nr. 7—8/1987

R: $n = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 2\,880$

4. Fie $A = 2^m \cdot 3^n$; $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine m și n știind că puterea a patra a lui A are 1 313 divizori.

Damian Marinescu — G.M. nr. 10/1985

Soluție: $A^4 = 2^{4m} \cdot 3^{4n}$, $1\,313 = 13 \cdot 101$, deci $(4m + 1)(4n + 1) = 13 \cdot 101 = 101 \cdot 13$, de unde deducem: $m = 3$, $n = 25$ sau $m = 25$, $n = 3$.

5. Să se găsească toți divizorii sumei numerelor impare de la 1 la 99 inclusiv.

I. Pastramă — G.M. nr. 8/1977

R: 15 divizori

6. Știind că suma divizorilor numărului natural n este $n + 8$, să se determine n.

I. Joldiș — G.M. nr. 2/1980

R: $n = 70$

7. Să se determine numărul natural n care îndeplinește simultan condițiile:

a) este divizibil cu 6;

b) în mulțimea divizorilor săi găsim doar două numere prime, distincte;

c) c.m.m.d.c. al său este pătrat perfect;

d) are 28 de divizori.

Ștefan Smarandache — G.M. nr. 8/1982

R: $2^8 \cdot 8^6$

8. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{abab}$, scrise în baza 10, știind că cifrele a și b sînt numere consecutive și că au doar doi divizori proprii.

Ion Niță — G.M. nr. 9—10/1982

Soluție: $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$. Cum 101 este număr prim și $\overline{abab}$ trebuie să aibă numai doi divizori proprii, trebuie ca și $\overline{ab}$ să fie prim. Dintre toate numerele prime de forma $\overline{ab}$ cu cifrele consecutive numai numerele 28, 67 și 89. Deci numerele căutate sînt: 2 828; 6 767; 8 989.

9. Determinați numărul $\overline{abcd}$ știind că numerele $\overline{dc}$ și $\overline{ba}$ sînt multiplii consecutivi ai lui 13, iar suma lor are exact trei divizori.

Aurelia și Ion Dinu — G.M. nr. 1/1988

R: $\overline{abcd} = 6\,231$

10. Să se determine cel mai mic număr care are 8 divizori distincți mai mici ca 10.

Ioan Joldiș — G.M. nr. 9—10/1982

R: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 504$

11. Să se găsească cel mai mare număr de forma $\overline{abcdabcd}$, scris în baza 10, care să aibă cel mai mic număr de divizori, unde $a \neq b \neq c \neq d \neq d \neq a$.

Soluție: $\overline{abcdabcd} = 1\,001 \cdot \overline{abcd}$. Cel mai mare număr $\overline{abcd}$ este 9 876, dar, ca să aibă și cel mai mic număr de divizori, trebuie să fie număr prim și imediat mai mic decît 9 876. Acesta este 9 871. Deci numărul căutat este 98 719 871.

12. Să se determine cel mai mic și cel mai mare număr de forma $\overline{abab}$ scris în baza 10, în ipoteza că aceste numere au cel mai mic număr de divizori.

Ioan Vișan și Carmen Georgescu — G.M. nr. 3/1983

R: 1 313 și 9 797

13. Să se afle numărul $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 10\,000\,000$, care are cel mai mare număr de divizori primi diferiți între ei. (Toți divizorii care apar în descompunerea numărului sînt la puterea întîi).

Nicolae Burz — G.M. nr. 6/1985

R: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 9\,699\,690$

14. Răsturnatele căror numere prime de două cifre, scrise în baza 10, au cei mai mulți divizori?

D. Săvulescu — G.M. nr. 4/1978

R: 23 are răsturnatul $32 = 2^5$

15. Să se afle numărul de 8 cifre multiplu de 77 care are cel mai mare număr de divizori. Cîte numere sînt cu cel mai mic număr de divizor?

Damian Marinescu — G.M. nr. 10/1981

Scanned with OKEN Scanner

Soluție 924 cu cel mai mare număr de divizori 72 • 2; 77 • 8; 77 • 5; 77 • 7; 77 • 11 sînt numere de 8 cifre divizibile cu 77 cu cel mai mic număr de divizori.

16. Suma vîrstelor celor doi fii ai mei este un număr natural cuprins între 10 și 15, care are 6 divizori. În urmă cu 8 ani vîrsta celui mare era cît dublul vîrstei celui mic. Ce vîrste au fiii mei?

George Mărgineanu — G.M. nr. 10/1981

R: 7 ani; 5 ani

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al III-lea

FRACȚII

A. COMPARAREA FRACȚIEI CU ÎNTREGUL. ORDONAREA FRACȚIILOR

1. Să se afle cea mai mare fracție ordinară de forma $\frac{\overline{1x}}{\overline{7yx}}$ știind că $\overline{1x}$ este număr prim, iar $\overline{7yx}$ este un număr natural divizibil cu 45.

I.C. Ligor — G.M. nr. 11/1977

Soluție: $\overline{1x}$ maxim și prim pentru $x = 9$
$\overline{7yx}$ minim și divizibil cu 5 cînd $z \in \{0, 5\}$
7y0 divizibil cu 9 dacă $7 + y + 0 = M9$, adică $y = 2$

$$R: \frac{19}{720}$$

2. Care este cel mai mare număr rațional reprezentat de fracția $\frac{\overline{12ab}}{\overline{x6}}$ dacă numitorul este pătratul unui număr natural, iar numărătorul este multiplu de 9?

D. Săvulescu — G.M. nr. 2—3/1982

Soluție: $\overline{x6}$ cel mai mic pătrat perfect, cînd $x = 1$; $\overline{12ab}$ cel mai mare divizibil cu 9, cînd $a = 9$; $b = 6$

$$R: \frac{1\,296}{16}$$

3. Să se afle măsura unui unghi ascuțit u, știind că raportul dintre complementul și suplimentul său este egal cu cel mai mare număr rațional exprimat de fracția $\frac{\overline{2x}}{\overline{abc}}$, unde $\overline{2x}$ divide $\overline{abc}$, iar x, a, b, c sînt cifre în baza 10.

Ion Negoiță — G.M. nr. 6/1986

Soluție: Din condițiile problemei vom avea $x = 9$, $\overline{abc} = 116$, deci $a = b$. Pentru ca $a \neq b$, $\overline{abc} = 145$. Pentru cele două cazuri avem:

$$\frac{90° - u}{180° - u} = \frac{1}{4}, \text{ deci } u = 36°; \text{ analog } \frac{90° - u}{180° - u} = \frac{1}{5}$$

4. a) Să se determine toate numerele de forma $a = \overline{25x7y}$ și $b = \overline{2u4v}$, divizibile cu 12.

b) Să se stabilească numărul fracțiilor cu numărătorul a și numitorul b.

Romeo Munteanu — G.M. nr. 8/1981

Soluție: a) Aplicînd criteriul de divizibilitate cu 4, obținem $y = 2$ și $y = 6$. Apoi se aplică criteriul de divizibilitate cu 3 și obținem: $a \in \{25\,272; 25\,572; 25\,872; 25\,176; 25\,476; 25\,776\}$.

Procedînd analog, obținem:
$b = \{2\,040; 2\,340; 2\,640; 2\,940; 2\,244; 2\,544; 2\,844; 2\,148; 2\,448; 2\,748\}$. Se analizează cazurile cînd cifrele pot sau nu să fie identice.

5. Să se arate că dacă $a > 0$, atunci fracția $\frac{a^5 - a + 1}{2a^3 - 2a + 1}$ este supraunitară.

E. Dobre și G. Dobre — G.M. nr. 2—3/1982

Soluție: Dacă $a > 0$, atunci $a(a^2 - 1)^2 > 0$ sau $a^5 - 2a^3 + a > 0$ sau $a^5 - a + 1 > 2a^3 - 2a + 1$ sau $\frac{a^5 - a + 1}{2a^3 - 2a + 1} > 1$, deci fracția este supraunitară.

6. Să se demonstreze că fracția $f(n) = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ este subunitară.

Gh. Bostan — G.M. nr. 9/1975

7. Să se determine $a \in \mathbb{N}$ pentru care fiecare din fracțiile de mai jos

$$1) \frac{5a-2}{11}; \quad 2) \frac{96}{3a-4}$$

este supraunitară și are partea întreagă egală cu 3.

Romeo Munteanu — G.M. nr. 9/1981

Soluție 1) $5a - 2 > 11$; deci $a \geq 3$. Ca partea întreagă să fie egală cu 3, trebuie ca $3 \leq \frac{5a-2}{11} < 4$, se obține $a \in \{7, 8, 9\}$.

2) Analog cu 1).

8. Să se stabilească dacă fracția $\frac{999^{1000} + 1\,000^{999}}{999^{999} + 1\,000^{1000}}$ este supraunitară sau subunitară.

x x x — G.M. nr. 6/1978

Soluție $F = \frac{999^{999+1} + 1\,000^{999}}{999^{999} + 1\,000^{999+1}} = \frac{999^{999} \cdot 999 + 1\,000^{999}}{999^{999} + 1\,000^{999} \cdot 1\,000} =$

$$= \frac{999^{999} + 999^{999} \cdot 998 + 1\,000^{999}}{999^{999} + 1\,000^{999} \cdot 999 + 1\,000^{999}}.$$

Dar $999^{999} \cdot 998 < 1\,000^{999} \cdot 999$, rezultă $F < 1$.

9. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încît fracția $F(n) = \frac{2^{n+5} - 5 \cdot 2^n + 5}{221}$ să fie

a) cel mult egală cu 1; b) cel puțin egală cu 1.

Domnica și Marin Grigorescu-Ivănescu — G.M. nr. 8/1980

Soluție: a) Condiția „cel mult egală cu „1" se transpune în $2^{n+5} - 5 \cdot 2^n + 5 \leq 221$, adică $2^n \leq 8$, deci $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b) $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.

10. Să se scrie în ordine crescătoare fracțiile:

$$\frac{9}{14}, \frac{10}{21}, \frac{11}{28}, \ldots, \frac{1\,983}{13\,832}, \frac{1\,984}{13\,839}.$$

N. Ivăschescu — G.M. nr. 4/1980

R: $\frac{1\,984}{13\,839} < \frac{1\,983}{13\,832} < \ldots < \frac{11}{28} < \frac{10}{21} < \frac{9}{14}$

11. Să se scrie în ordine crescătoare următoarele fracții:

$$\frac{7}{10}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}, \ldots, \frac{1\,983}{9\,890}, \frac{1\,984}{9\,895}.$$

Iulian Mazilu — G.M. nr. 6/1980

R: $\frac{1\,984}{9\,895} < \frac{1\,983}{9\,890} < \ldots < \frac{9}{20} < \frac{8}{15} < \frac{7}{10}$

12. Să se scrie în ordine crescătoare fracțiile:

$$\frac{m+k}{mk}, \frac{m+k+1}{m(k+1)}, \frac{m+k+2}{m(k+2)}, \ldots, \frac{m+k+n}{m(k+n)}$$

unde $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, $m > k$.

Ilie Diaconu — G.M. nr. 6/1978

Soluție: Comparăm două fracții consecutive; de exemplu, ultimele două:

$\frac{m+k+n-1}{m(k+n-1)}$ și $\frac{m+k+n}{m(k+n)}$. Se ajunge la concluzia:

$$\frac{m+k+n}{m(k+n)} < \ldots < \frac{m+k+1}{m(k+1)} < \frac{m+k}{mk}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Să se arate că $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}>\frac{a+c}{b+d}$, unde $a, b, c, d \in R_+^*$.

Vilhelm Done — G.M. nr. 7/1981

Soluție

Din $\frac{a}{b}>\frac{a}{b+d}$ și $\frac{c}{d}>\frac{c}{b+d}$ rezultă c.c.t.d.

14. Pentru ce valori $x \in \mathbb{N}$ avem, pe rînd

a) $\frac{8}{5}>\frac{x+1}{85}>\frac{8}{7}$ și b) $\frac{2}{3}<\frac{x+1}{5}<\frac{5}{7}$?

R: a) x 15, 16, 17, 18, 19
b) $x=\varnothing$

Scanned with OKEN Scanner

B. SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR

1. Să se determine cel mai mic număr natural de forma

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50}{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d}$$

Dan Grigore — G.M. nr. 8/1980

R: $11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$

2. Să se demonstreze că fracția $\frac{166 \ldots 666}{666 \ldots 664}$ este egală cu $\frac{1}{4}$ atunci cînd și numărătorul și numitorul au același număr de cifre.

Andrei Constantinescu — G.M. nr. 5/1977

3. Să se arate că fracțiile

$\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$; $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$; $\frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$; $\frac{\overline{abababab}}{\overline{cdcdcdcd}}$ etc. sînt reprezentanți ai aceluiași număr rațional.

C. Cărbunaru — G.M. nr. 3/1981

Soluție: $\frac{\overline{abab}}{\overline{abab}} = \frac{101\ \overline{ab}}{101\ \overline{cd}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$; $\frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}} = \frac{10101\ \overline{ab}}{10101\ \overline{cd}} =$

$= \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$; $\frac{\overline{abababab}}{\overline{cdcdcdcd}} = \frac{1010101\ \overline{ab}}{1010101\ \overline{cd}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$

4. Să se arate că fracția

$$F = \frac{11^n + 11^{n+1} + 11^{n+2} + 11^{n+3}}{7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

se poate simplifica cu 8 dacă $n \in \mathbb{N}$.

Mădălina Pavel — G.M. nr. 7—8/1987

Soluție: Se dă factor comun 11^n, respectiv 7^n, și se obține

$$F = \frac{11^n \cdot 1\,468}{7^n \cdot 400} \text{ de unde } 1\,468 = M8, \text{ respectiv } 400 = M8$$

5. Să se arate că fracția

$$F = \frac{8^{n+1} \cdot 5^n + 8^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 8^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 8^n + 8^{n+1} \cdot 4^n + 2^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$$

se poate simplifica prin 17, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Mihaela Dascălu — G.M. nr. 11—12/1986

R: $F = \frac{8^n \cdot 5^n \cdot 84}{8^n \cdot 5^n \cdot 17}$

6. Să se determine toate fracțiile de forma $M = \frac{\overline{8a9b}}{\overline{2c3d}}$ unde a, b, c, d sînt cifre, nu neapărat distincte, care se simplifică cu 55.

Andrei Boroș — G.M. nr. 8/1984

R: $\frac{8\,190}{2\,530}$; $\frac{8\,795}{2\,530}$

7. Fie

$$N_1 = \frac{(n \cdot 66^n - n \cdot 40^n)(n \cdot 810^n - n \cdot 207^n + 810^n - 207^n)}{1\,978}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Numărul N_1 este natural pentru orice $n \in \mathbb{N}$?

N. Ivăşchescu — G.M. nr. 9/1978

Soluție:

$$N_1 = \frac{n(n+1)\cdot 2^n \cdot (63^n - 20^n)(310^n - 207^n)}{2 \cdot 28 \cdot 43}$$

Pentru $n = 1$, rezultă: $N_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 10}{2 \cdot 28 \cdot 43} \notin \mathbb{N}$, deci nu este număr natural.

8. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fracția

$$E = \frac{2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^{n+1}}{2^{n+1} \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 6^n}$$ este număr natural.

Valerica Oinu — G.M. nr. 11—12/1987

R · E 11. Vezi problema nr. 5!

9. Să se arate că $\frac{36^n + 12 \cdot 6^n + 32}{5 \cdot 6^n + 40} \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Mihaela Banyai — G.M. nr. 2—3/1982

Soluție: $\frac{(6^n + 6)^2 - 4}{5(6^n + 8)} = \frac{6^n + 4}{5}$

Cum 6^n se termină cu 6, $6^n + 4$ se termină prin zero, deci fracția aparține lui $\mathbb{N}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

10. Să se arate că numărul

$$A = \frac{24^{1982} + 400^{991} - (2^3)^{1324} : 256}{24 \cdot 89\,574 + 2^{2^2} - 24 \cdot 89\,573}$$ este natural.

Gh. Corina — G.M. nr. 3/1985

Soluție: Se arată ușor că numitorul este M40. La numitor se vede că $400^{991} = M40$. Dar $24^{1982} - (2^3)^{1324} : 256 = 2^{3964}(3^{1982} \cdot 2^{1982} - 1) = M8, 3^{1982}$ se termină prin 9, 2^{1982} se termină prin 4, deci $3^{1982} \cdot 2^{1982} - 1$ se termină prin 5, adică este multiplu de 5. În concluzie, numărătorul este un multiplu de 40, deci $A \in \mathbb{N}$.

11. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ \overline{} \;\middle|\; \frac{\overline{}}{9(a \quad + c)} \in N \right\}$$

Damian Marinescu — G.M. nr. 10/1987

Soluție: Din condiția problemei, avem $\overline{abc} = [illegible] b + c)$. Dac[illegible] 19, rezultă $a + b + c = M9$, adică $\overline{abc} = k \cdot 81$. Pentr[illegible] obținem numerele 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891, 972, dar nu toate verifică condiția problemei.

$A = \{162, 243, 324, 405, 486, 648, 810, 972\}$.

12. Se consideră numerele $N_1 = \overline{xyxyxy}$ și $N_2 = \overline{xyxy}$ scrise în sistemul zecimal. Să se arate că:

1) Raportul N_1/N_2 este constant, oricare ar fi cifrele x și y.
2) Numărul N_1 este un pătrat perfect?

Ion Voicu — G.M. nr. 1/1978

Soluție:

$$a)\ \frac{N_1}{N} = \frac{10101 \cdot \overline{xy}}{101 \cdot xy} = \frac{10101}{101}$$

b) $N_1 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{xy}$, deci pentru nici o valoare a lui $\overline{xy}$ N_1 nu poate fi pătrat perfect.

13. Să se afle numerele naturale de 3 cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\dfrac{34}{x^2 + y^2 + z^2}$ este număr natural și $x \neq y \neq z$.

Concurs Rm. Vîlcea, 1986 — G.M. nr. 2/1987

Soluție: Divizorii lui 34 sînt: $\{1, 2, 17, 34\}$.

Dacă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nu există soluții

$x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nu există soluții

Pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 17$ avem mai multe posibilități. De exemplu: $x = 1$; $y = 0$; $z = 4$, deci $\overline{xyz} = 104$, ș.a.m.d.

Pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 34$ avem mai multe posibilități. De exemplu: $x = 5$; $y = 3$; $z = 0$ se obține $\overline{xyz} = 530$ ș.a.m.d.

14. Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{1\,985 + 397 \cdot n}{1\,985 - 397 \cdot n}$ este număr natural.

Viorel Nicolae — G.M. nr. 2/1987

Soluție: Fracția se mai scrie $\frac{1\,985 - 397 \cdot n}{3\,970} - 1$ și se obține $n = 4$ și $n = 5$.

15. Să se afle cuplurile $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ astfel încît $E = \frac{x + y - 3}{xy - 2x - y + 2} \in \mathbb{N}$.

Gh. Pușcașu — G.M. nr. 7/1982

Soluție: $E = \frac{(x-1)+(y-2)}{(x-1)(y-2)} = \frac{1}{y-2} + \frac{1}{x-1}$

Pentru ca $E \in \mathbb{N}$ trebuie ca $y - 2 = \pm 1$; $x - y = \pm 1$, de unde $y \in \{1, 3\}$ și $x \in \{0, 2\}$

$(0, 1)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(2, 3)$

16. Se dă fracția $\frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{52} + x^{53} + x^{54}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^8 + x^9 + x^{10}} = F(x)$

Să se arate că pentru $x \in \mathbb{N}$, $F(x)$ ia numai valori numere întregi.

Th. Dăneț — G.M. nr. 12/1984

Soluție:

$$F(x) = \frac{(1 + x + x^2 + \ldots + x^{52} + x^{53} + x^{54})(x - 1)}{(1 + x + x^2 + \ldots + x^8 + x^9 + x^{10})(x - 1)} =$$

$$= \frac{x^{55} - 1}{x^{11} - 1} = \frac{(x^{11})^5 - 1}{x^{11} - 1} =$$

$$= \frac{(x^{11} - 1)[(x^{11})^4 + (x^{11})^3 + (x^{11})^2 + x^{11} + 1]}{x^{11} - 1} = x^{44} + x^{33} +$$

$+ x^{22} + x^{11} + 1 \in \mathbb{Z}$.

17 Să se arate că numărul $m = \frac{x^7}{14 \cdot 4} - \frac{x^5}{4} + \frac{49 \cdot x^3}{14 \cdot 4} - \frac{9x}{14}$ este întreg, oricare ar fi x întreg.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 2/1980

Soluție: Aducînd la același numitor și descompunînd în factori primi atît numărătorul cît și numitorul se obține

$$m = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)}{2^3 \cdot 7}$$

Din 7 factori întregi consecutivi, unul și numai unul este divizibil cu 7. Analog pentru 8.

18. Fie fracția $\frac{3n^2+5n+6}{5n^2+7n+8}$, $n \in \mathbb{N}$.

Să se demonstreze că pentru oricare valoare a lui $n \in \mathbb{N}$ fracția se poate simplifica.

Vasile Scurtu — G.M. nr. 6/1982

Soluție: $\frac{(3n+2)(n+1)+4}{(5n+2)(n+1)+8}$ se poate simplifica prin 2 indiferent de paritatea sau imparitatea lui n.

19. Fracțiile $\frac{381}{\overline{5x}}$ și $\frac{565}{\overline{8y}}$ se pot simplifica și nu pot fi mai mari ca 7. Care din cele două fracții este mai mare?

Ion Pascaru — G.M. nr. 6/1983

Soluție: Deoarece $381 = 3 \cdot 127$ rezultă că $\overline{5x}$ trebuie să se dividă prin 3, deci $\overline{5x} \in \{51, 54, 57\}$. Numai fracția $\frac{381}{57} < 7$.

Analog $\frac{565}{85} < 7$. Comparînd, avem $\frac{381}{\overline{5x}} > \frac{565}{\overline{8y}}$.

Scanned with OKEN Scanner

20. Care este cea mai mică fracție de forma $\frac{\overline{162abc}}{\overline{1x2y7}}$ (numerele fiind scrise în baza 10), dacă numărătorul se divide cu 45 și numitorul prin 65, iar numerele sînt formate din cifre distincte? Dar cea mai mare? Să se afle forma ireductibilă a acestor fracții.

Al. Nebunescu — G.M. nr. 2/1984

Soluție: Cea mai mică fracție se obține cînd numărătorul este cel mai mic și numitorul cel mai mare și invers pentru fracția cea mai mare.

Notăm numărătorul $N_1 = \overline{162abc}$. Dacă N_1 se divide prin 45, rezultă că N_1 se divide prin 5, deci $c \in \{0, 5\}$.

Dacă $c = 0$, avem $N_1 = \overline{162ab0}$, unde $a, b \notin \{0, 1, 2, 6\}$. Pentru ca N_1 să se dividă prin 9, trebuie ca $1 + 6 + 2 + a + b = M9$ sau $a + b = M9$. Ca numărul N_1 să fie mai mic, luăm $a = 4$ și $b = 5$, deci $N_1 = 162\,450$, iar pentru ca să fie cel mai mare luăm $a = 5$ și $b = 4$, deci $N_1 = 162\,540$.

Dacă $c = 5$, avem $N_1 = \overline{162ab5}$, unde $a, b \notin \{1, 2, 5, 6\}$. Pentru ca N_1 să se dividă cu 9 trebuie ca $1 + 6 + 2 + a + b + 5 = M9$. Ca numărul N_1 să fie cel mai mic, luăm $a = 0$ și $b = 4$, deci $N_1 = 162\,045$, iar pentru ca să fie cel mai mare luăm $a = 9$ și $b = 4$, deci $N_1 = 162\,945$. Acești doi numărători corespund condiției.

Pentru numitor $N_2 = \overline{1x2yz}$ se procedează analog. Criteriul cu 5 conduce la $z \in \{0, 5\}$. Dacă $z = 0$, $N_2 = \overline{1x2y0}$ și $x, y \in \{0, 1, 2\}$. Criteriul cu 11 conduce la $\overline{2y0} - \overline{1x} \ M11$ sau $10y - x + 3 = M11$ și obținem $N_2 = 10\,280$, respectiv $N_2 = 19\,250$.

Dacă $z = 5$, obținem $N_2 = 10\,285$, respectiv $18\,205$. Rămîne valabilă perechea $19\,250$; $10\,280$. În final obținem:

$$A_1 = \frac{162\,045}{19\,250} = \frac{32\,409}{3\,850}; \quad F_2 = \frac{162\,945}{10\,280} = \frac{32\,589}{2\,056}$$

21. Să se afle cea mai mare și cea mai mică fracție de forma $\frac{\overline{x3yz}}{\overline{5uvw}}$ care se poate simplifica cu 180, unde $x, y, z, u,$

v, w sînt cifre în baza 10.

C. Tămășanu — G.M. nr. 1/1988

R i Vezi problema nr. 21 !

22. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 1$ fracția $\frac{41 \quad 7^{n-1} + 7^n}{10^{2n} - 2^{2n}}$ se simplifică prin 48.

Paraschiva Ciobanu — G.M. nr. 5/1981

23. Să se arate că fracția $\frac{28 \cdot 16^n + 16^{n+1}}{17^n - 17^{n-1}}$ se poate simplifica prin 4 ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

24. Să se simplifice fracția

$$\frac{4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 8 \cdot 12 + \ldots + 200 \cdot 300}{6 \cdot 8 + 9 \cdot 12 + 12 \cdot 16 + \ldots + 300 \cdot 400}.$$

I. Gheorghiță — G.M. nr. 9/1979

Soluție: $4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 8 \cdot 12 + \ldots + 200 \cdot 300 =$

$$= \sum_{k=2}^{100} 2k \cdot 3k = 6 \sum_{k=2}^{100} k^2$$

$$6 \cdot 8 + 9 \cdot 12 + 12 \cdot 16 + \ldots + 300 \cdot 400 =$$

$$= \sum_{k=2}^{100} 3k \cdot 4k = 12 \sum_{k=2}^{100} k^2$$

Valoarea fracției este $\frac{1}{2}$.

25 Pentru ce valori ale lui n fracția $\frac{6n + 7}{7n + 2}$ se poate simplifica.

Alexandru Toporan — G.M. nr. 11/1985

Soluţie: Notaţia d/A se citeşte d divide pe A.

Fie d valoarea prin care se poate simplifica fracţia dată, atunci d/6n + 7 şi d/7n + 2 rezultă d/42n + 49 şi d/42n + 12 sau d/(42n + 49) — (42n + 12) sau d/37. Deci $6n + 7 = k_1 \cdot 37$ şi $7n + 2 = k_2 \cdot 37$. Făcînd diferenţa, avem $n - 5 = (k_2 - k_1) \cdot 37$ sau $n = 5 + M37$.

26. Să se afle pentru ce valori ale lui n fracţia $\frac{5n + 3}{11n + 8}$ se poate simplifica.

Manual de aritmetică

R: $5 + 7k$. Vezi problema nr. 25!

27. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel ca fracţia $\frac{2x + 13}{x - 4}$

a) să se simplifice cu 3;
b) să se simplifice cu 7.

Dragoş Dobrin — G.M. nr. 8/1980

R: a) $x = 1 + M3$
b) $x = 4 + M7$ Vezi problema nr. 25!

28. Să se găsească fracţiile de forma $\frac{\overline{1x7}}{yx}$ în baza 10 care se pot simplifica cu 3.

Andrei Boroş — G.M. nr. 9/1981

R: $\overline{1x7} \in \{117, 147, 177\}$ şi
$\overline{yz} \in \{21, 24, 27, 51, 54, 57, 81, 84, 87\}$

Fracţiile vor fi formate din toate combinaţiile cu numărătorul din prima mulţime şi numitorul din a doua mulţime.

29. Să se determine toate fracţiile de forma $\frac{\overline{3y4x}}{\overline{x3y}}$ astfel încît ele să se simplifice cu 18. Numerele sînt scrise în baza 10.

St. Smarandache — G.M. nr. 8/1981

R: $\frac{8\,442}{234}$; $\frac{8\,244}{432}$

Scanned with OKEN Scanner

30. Să se determine toate fracțiile de forma $\frac{\overline{8x7y}}{\overline{5a18b}}$ care se pot simplifica cu 44.

Ioan Ciucur — G.M. nr. 7/1985

R: $\frac{8\,872}{55\,182}$; $\frac{8\,872}{59\,186}$; $\frac{8\,476}{55\,182}$; $\frac{8\,476}{59\,186}$

31. Să se determine fracțiile de forma $\frac{\overline{1a2b}}{\overline{x1y}}$ astfel încît ele să se simplifice cu 55.

Antoneta Maftei — G.M. nr. 7/1979

R: $\frac{1\,320}{110}$; $\frac{1\,320}{715}$; $\frac{1\,925}{110}$; $\frac{1\,925}{715}$

32. Să se arate că dacă

$$F = \frac{k + 2}{2k^3 + 12k^2 + 24k + 52}, \quad (k \in \mathbb{N})$$

se simplifică printr-un număr natural s, atunci s divide 36.

G. Coandă — G.M. nr. 7/1988

Soluție: Numitorul se mai scrie $2(k + 2)^3 + 36$. Dacă F se simplifică prin s, rezultă că și numitorul se simplifică prin s, adică s divide pe 36.

33. Să se demonstreze că:

a) fracția $F_1 = \frac{2x + 3}{8x + 4}$ este ireductibilă;

b) dacă fracția $F_2 = \frac{n + 2}{2n(n^3 + 6n + 12) + 79}$ se simplifică printr-un număr D, atunci D este un divizor al lui 63 (x,n, $D \in \mathbb{N}$).

Valeria Radu — G.M. nr. 6/1983

Soluție: a) Presupunem că există un număr d, $d \neq 1$ astfel ca $d/2x + 3$ și $d/3x + 4$, atunci $d/6x + 9$ și $d/6x + 8$. Făcînd diferența, rezultă $d/(6x + 9 - 6x - 8)$, deci $d/1$. Deci fracția F_1 este ireductibilă.

b) Dacă F_2 se simplifică prin D, atunci $D/n + 2$ și $D/2n^3 + 4n^2 + 12n^2 + 28n + 79$ sau $D/2n^3 + 4n^2$ și $D/2n^3 + 12n^2 + 24n + 79$. Deci $D/(2n^3 + 12n^2 + 24n + 79 - 2n^3 - 4n^2)$ sau $D/(n + 2)(8n + 8) + 63$. Cum $D/n + 2$, rezultă $D/63$.

34. Fie fracția $\frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că nu există valori $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția este ireductibilă.

Vasile Scurtu — G.M. nr. 2 — 3/1982

R. Vezi problema nr. 33!

a) Se ajunge la $d/2n$, deci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fracția este reductibilă.

35. Să se arate că fracția $F(n) = \frac{2n + 1}{3n + 1}$ este ireductibilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

N. Bebea — G.M. nr. 1/1980

R. $d/1$. Vezi problema nr. 33 pct. a!

36. Simplificați fracția $\frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n-1}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{3n-1}}$ astfel încît să se obțină o fracție ireductibilă, unde $x \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Viorel Nicolae — G.M. nr. 11/1984

R. $\frac{x^n + 1}{(x^n)^2 + x^n + 1}$.

37. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel ca fracția $\frac{7x + 13}{2x - 6}$

a) să se poată simplifica cu 2;
b) să se poată simplifica cu 3;
c) să se poată simplifica cu 11;
d) să fie ireductibilă.

Dragoș Dobrin — G.M. nr. 6/1980

R 1 c) $x = M11 + 86$

d) $x \neq M2$; $x \neq M3$; $x \neq M\ 11 + 86$

38. Să se demonstreze că fracția $\frac{m^2n + mn}{p^2 + p}$ $(m, n, p \in N)$ nu este ireductibilă.

Camelia Popescu — G.M. nr. 12/1977

Soluție: Fracția se mai poate scrie $\frac{mn(m+n)}{p(p+1)}$.

a) Dacă m, n sînt impare, rezultă $m + n$ pară și cum $p(p + 1)$ este număr par rezultă că fracția se simplifică prin 2, deci nu este ireductibilă.

b) Dacă m, n sînt pare sau cel puțin unul din cele două numere este par, atunci fracția se simplifică tot prin 2, deci nici în acest caz nu este ireductibilă.

39. Cîte fracții de forma $\frac{198y}{2x}$ sînt ireductibile, unde numitorul este divizibil cu 5?

D. Săvulescu — G.M. nr. 12/1985

Soluție: Dacă numitorul este divizibil cu 5, rezultă că $x \in \{0,5\}$.

I. Considerăm $x = 0$, deci numitorul este 20. Impunem condiția ca numărătorul să nu se dividă prin 5 sau prin 4.

$y \notin \{0,5\}$, iar $\overline{8y}$ să nu se dividă prin 4, atunci $y \in \{1, 3, 7, 9\}$, deci vom avea 4 fracții ireductibile cu numitorul 20: $\frac{1\,981}{20}$; $\frac{1\,983}{20}$; $\frac{1\,987}{20}$; $\frac{1\,989}{20}$.

II. Considerăm $x = 5$, deci numitorul este $25 = 5^2$. Impunem condiția ca numărătorul să nu se dividă prin 25, deci $y \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, vom avea 8 fracții ireductibile cu numitorul 25: $\frac{1\,981}{25}$; $\frac{1\,982}{25}$; $\frac{1\,983}{25}$; $\frac{1\,984}{25}$; $\frac{1\,986}{25}$; $\frac{1\,987}{25}$;

$\frac{1\,988}{25}$; $\frac{1\,989}{25}$, în total 12 fracții care răspund problemei.

40. Cîte fracții de tipul $\frac{\overline{9y7x}}{24}$ sînt ireductibile?

D. Săvulescu — G.M. nr. 2/1984

Soluție ¡ Se va calcula mai întîi cîte numere de forma $\overline{9y7x}$ sînt divizibile cu 24, apoi se va scădea din numărul total posibil de $10 \times 10 = 100$, dacă admitem ca $x = y$ și vom determina numărul cerut de problemă.

41. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem ¡

$$\frac{3^{n+1} \cdot 2^{2n+1} + 7 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^{2n+2} - 49 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} + 2^{2n+1} \cdot 3^{n+2}} = 1.$$

E. Smărăndoiu — G.M. nr. 8/1985

42. Să se determine cifrele x și a diferite între ele astfel ca să avem egalitatea ¡

a) $\frac{\overline{1x}}{\overline{xa}} = \frac{1}{a}$; b) $\frac{\overline{1xx}}{\overline{xxa}} = \frac{1}{a}$; c) $\frac{\overline{1xxx}}{\overline{xxxa}} = \frac{1}{a}$.

Numerele sînt scrise în baza de numerație 10.

Katalin Kürthy — G.M. nr. 11 1979

R ¡ $x = 9$; $a = 5$

Scanned with OKEN Scanner

C. OPERAȚII CU FRACȚII

1. Să se afle două numere mixte știind că ele au suma egală cu $7\frac{11}{21}$ și că fiecare număr mixt are întregul, numărătorul și numitorul său numere naturale consecutive.

D. Săvulescu — G.M. nr. 2/1979

Soluție: Numerele mixte sînt:

$$n\frac{n+1}{n+2} \text{ și } m\frac{m+1}{m+2}, \text{ astfel ca } n\frac{n+1}{n+2}+m\frac{m+1}{m+2}=7\frac{11}{21}.$$

Deoarece numitorul este 21, rezultă că $(n+2)(m+2)=3\cdot 7$, de unde $n=1$, $m=5$. Numerele căutate sînt $1\frac{2}{3}$ și $5\frac{6}{7}$.

2. Să se compare numerele:

$$N_1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1975\cdot 1976}+$$

$$+\frac{1}{1976\cdot 1977} \text{ și } N_2=\frac{1976}{1977}$$

N. Ivășchescu — G.M. nr. 3/1977

Soluție: $N_1=\sum_{k=1}^{1976}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{1976}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1976} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{1976} -$$

$$- \frac{1}{1977} = 1 - \frac{1}{1977} = \frac{1\,976}{1\,977} = N_2, \text{ deci } N_1 = N_2.$$

3. Să se calculeze suma

$$\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{19}{8 \cdot 27} + \frac{37}{27 \cdot 64} + \ldots + \frac{7\,351}{117\,649 \cdot 125\,000}$$

Generalizare.

Petrică Ciunga — G.M. nr. 5/1988

Soluție:

$$\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{19}{8 \cdot 27} + \frac{37}{27 \cdot 64} + \ldots + \frac{(49+1)^3 - 49^3}{49^3 \cdot (49+1)^3}$$

Generalizare:

$$S_n = \frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{19}{8 \cdot 27} + \frac{37}{27 \cdot 64} + \ldots + \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3 - k^3}{k^3 (k+1)^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^3} = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

dacă $n = 45$, $S_{49} = 1 - \frac{1}{50^3} = \frac{124\,999}{125\,000}$

4. Să se calculeze suma

$$\frac{22\,401}{100} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$ și

să se arate că rezultatul este un pătrat perfect.

Lucian Buliga — G.M. nr. 10/1980

Soluție:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$, atunci $S = \frac{22\,401}{100} + \frac{99}{100} = 225 = 15^2$

5. Se notează $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$, $n \in \mathbb{N}^*$
Să se demonstreze că

$x = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$ este un număr întreg.

C. Cărbunaru — G.M. nr. 2/1980

Soluție: $x = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!}$ Dar $\frac{n!}{(n-k)!} \in \mathbb{N}$ pentru orice $0 \leq k < n$, deci $x \in \mathbb{N}$.

6. Fie $x = 6$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{3}$. Calculați

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yx} + \frac{1}{1+z+zx}.$$

x x x — G.M. nr. 6/1987

R : 1

7. Calculați $\frac{3}{1} + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \ldots + \frac{61}{30} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{30}\right)$.

Olimpiadă Prahova, etapa locală — G.M. nr. 9/1986

R : 60

8. Să se determine numerele x, y care verifică simultan egalitățile:

$x + y = 1$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)y$$

Liviu Pîrșan — G.M. nr. 2/1985

R: $x=y=\frac{1}{2}$

9. La aniversarea bunicului necentenar, nepotul a observat că împătritul vîrstei acestuia este un număr de 6 cifre care are suma inverselor cifrelor egală cu unitatea. Să se afle vîrsta bunicului.

Aurel Doboșan — G.M. nr. 6/1979

Soluție: $\overline{ab}$ vîrsta bunicului. Condiția problemei se scrie astfel: $\overline{ab}\cdot 4=\overline{xyz}$, unde $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ sau $z(x+y)=xy(z-1)$, deci $xy=z$ și $x+y=z+1$

$x=2,\ y=3,\ z=6$

Bunicul are 59 ani.

10. Se dă numărul $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$. Fără a-l calcula efectiv pe a, să se afle cel mai apropiat întreg de a.

Vasile Zidaru — E: 7169*.

R: 2

11 Fie numerele $a\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{N}$. Dacă fracția $\frac{a+b}{4a+11b}$ este echivalentă cu $\frac{}{5}$, calculați $\frac{b}{a}$.

Gh. Racu — G.M. nr. 4/1988

R: $\frac{b}{a}=\frac{1}{6}$

12. Să se afle un număr știind că diferența dintre doimea și sfertul său este mai mică decît treimea sa cu 39.

Dan Sergiu Cojocaru — G.M. nr. 4/1985

R: 468

13. Suma inverselor a 3 numere naturale este egală cu $\frac{2}{3}$. Care sînt aceste numere?

Ion Lupșor — G.M. nr. 1/1986

R: a = b, b = 3, c = 6

14. Se dau numerele:

$$A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

$$B = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

Să se arate că $A \cdot B = 1$. Generalizare.

I. Teodorescu — G.M. nr. 9/1977

Soluție: Se observă că A și B se pot scrie sub forma generală astfel:

$$A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{b}} = \frac{a + 2b}{a + b} \quad \text{și} \quad B = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{a}{b}} = \frac{a + b}{2b + a},$$

$AB = 1$

15. Știind că

$$a = \left(\frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \frac{10}{7} + \frac{10}{6} + \frac{10}{5}\right) - \left(\frac{5}{5} + \frac{4}{6} + \frac{3}{7} + \frac{2}{8} + \frac{1}{9}\right)$$

$b = (2^3 \cdot 3^2)^2 - (5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4)$

să se calculeze pe rînd: $a + b$; $b + a$; $a - b$; $b - a$; $a \cdot b$; $b \cdot a$; $a : b$; $b : a$; a^b; b^a.

Mihai Doroftei — G.M. nr. 4/1979

R: $a = 5$; $b = 0$ ș.a.m.d.

16. Calculați numărul

$$a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}$$

x x x — G.M. nr. 3/1987

R: $\frac{7}{8}$. Se folosește relația $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

17. Să se arate că:

$$\frac{2 \cdot 1979}{1 + \frac{1}{1+2} = \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+1979}} = 1980$$

Marcel Zavragiu — G.M. nr. 1/1980

Soluție: Calculăm separat numitorul, care se mai scrie astfel:

$$1 + \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+4) \cdot 4}{2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\frac{(1+1979) \cdot 1979}{2}} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} +$$

$$+ \ldots + \frac{2}{1979 \cdot 1980} = 2 \sum_{k=1}^{1979} \frac{1}{k(k+1)} = 2 \left(\sum_{k=1}^{1979} \frac{1}{k} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{1979} \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2 \cdot 1979}{1980}$$

Înlocuim în membrul stîng al egalității obținem 1 980

18. Să se arate că

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1978 \cdot 1980} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1979 \cdot 1980} = \frac{1}{6}$$

I. Purdel — G.M. nr. 10/1980

Soluție: Notăm $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n! = A$. Atunci S se va scrie

$$S = \frac{3}{4!} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6!} + \ldots + \frac{1979}{1979!} + \frac{1}{1980!} = \sum_{k=3}^{1979} \frac{k}{(k+1)!} +$$

$$+ \frac{1}{1980!} = \sum_{k=1}^{1979} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{1979} \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{1980!} = \frac{1}{6}$$

19. Există două fracții a căror sumă să fie egală cu produsul lor? Indicați un procedeu de găsire a acestor perechi de fracții.

Liviu Pîrșan — G. M. nr. 12/1977

Soluție: Fie $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ fracțiile căutate. Din condiția problemei $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ rezultă $a(c-d) = bc$. Dacă $a = c$, atunci $c = d + b$.

Caz particular: $a = c = 5$, $d + b = 5$ obținem $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{1}, \frac{5}{4}\right)$ ș.a.m.d.

20. a) Să se afle $\frac{2}{5}$ dintr-un număr natural știind că un sfert din jumătatea lui este cu 5 mai ... decît o treime din sfertul lui.

b) Să se afle $\frac{5}{2}$ dintr-un număr natural știind că o pătrime din sfertul lui este cu 5 mai ... decît o treime din jumătatea lui (În locul punctelor se va scrie " mai mare" sau "mai mic".)

Ștefan Tifui — G.M. nr. 4/1977

R i a) mai mare, b mai mic și 48 ; 120

21. a) Să se afle cea mai mare fracție astfel încît, împărțind fracțiile $\frac{72}{55}, \frac{68}{65}, \frac{48}{85}$ prin această fracție, se obțin cîturi întregi.

b) Să se afle cea mai mică fracție astfel încît, împărțind-o cu fracțiile $\frac{26}{485}, \frac{17}{880}, \frac{8}{645}$, se obțin cîturi întregi.

Vasile Chiriac — G.M. nr. 8/1982

Soluție i a) Fie $\frac{m}{n}$ fracția căutată, atunci

$\frac{72}{55} \cdot \frac{n}{m} \varepsilon Z, \frac{68}{65} \cdot \frac{n}{m} \varepsilon Z, \frac{48}{85} \cdot \frac{n}{m} \varepsilon Z$, unde $n = [55, 65, 85] =$ 5005 și $m = (72, 68, 48) = 4$. Fracția căutată este $\pm \frac{4}{5\,005}$.

b) Analog

22. Să se afle fracția astfel încît împărțind $\frac{8}{7}$ și $\frac{10}{9}$ la aceasta să se obțină cîturi numere naturale consecutive.

Ion Sărdaru — G.M. nr. 4/1983

Soluție : $\frac{8}{7} : \frac{x}{y} = n + 1$ și $\frac{10}{9} : \frac{x}{y} = n$. Împărțind cele două relații membru cu membru se obține $n = 85$ și $\frac{x}{y} = \frac{2}{63}$.

23. Să se afle cea mai mare fracție $\frac{a}{b}$ astfel încît împărțind fracțiile $\frac{8\,960}{7}$ și $\frac{5\,940}{288}$ la $\frac{a}{b}$, cîturile obținute să fie numere naturale.

Nicolae Păuna — G.M. nr. 4/1981

R i $\frac{a}{b} = \frac{1\,980}{1\,981}$. Vezi problema nr. 21 a) !

24. a) Să se afle cea mai mare fracție astfel încît împărțind fracțiile $\frac{16}{8}$, $\frac{26}{5}$, $\frac{86}{7}$, $\frac{46}{9}$ prin această fracție se obțin numere întregi.

b) Să se afle cea mai mică fracție astfel încît împărțind-o cu fracțiile $\frac{16}{115}$, $\frac{17}{215}$, $\frac{18}{415}$ să se obțină numere întregi.

Petre Ioniță — G.M. nr. 2/1987

R i Vezi problema nr. 21 !

25. Să se afle valoarea lui x, fără a folosi scrierea zecimală :

$$\frac{\overline{(abcd)}^2 - \overline{abcd}}{\overline{(abcc)}^2 + \overline{abcc}}(x-1) = \left(\frac{1}{a^n} - \frac{a-1}{a^{n+1}}\right)\left(\frac{b+1}{b^{n+1}} - \frac{1}{b^n}\right)(ab)^n.$$

Gh. Boga — G.M. nr. 2/19

R i $x = 1 + \frac{\overline{(abcc)}^2 + \overline{abcc}}{\overline{(abcd)}^2 - \overline{abcd}}$

D. RAPOARTE ȘI PROPORȚII. ÎMPĂRȚIREA ÎN PĂRȚI PROPORȚIONALE

1. Să se afle x din egalitatea $\frac{[4, x]}{(36, x)} = \frac{(36, x)}{[9, x]}$ unde (a, b) și [a, b] reprezintă c.m.m.d.c. și, respectiv, c.m.m.m.c. al numerelor naturale a și b.

Mina Merlă — G.M. nr. 10/1979

Soluție: Dacă $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$, atunci proporția devine $36 \cdot x^2 = (4, x) \cdot (9, x) \cdot (36, x)^2$, deci $x = 36$.

2. Fie $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 55$. Să se determine a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 dacă $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \frac{a_4}{4} = \frac{a_5}{5}$

Vasile Scurtu — G.M. nr. 2/1981

R: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 4$; $a_5 = 5$

3. Se dă șirul de rapoarte $\frac{6}{x} = \frac{1}{y} = \frac{2}{z} = \frac{3}{t}$. Să se afle x, y, z și t știind că $x = yz = 2t$.

Mircea Huțanu — G.M. nr. 10/1979

R: $x = 18$; $y = 3$; $z = 6$; $t = 9$

4. În balada "Miorița" se vorbește de 3 ciobănei care coborau la vale cu 3 turme de oi. Dacă numerele de oi pe care le aveau ei erau proporționale cu numerele $5\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $1\frac{4}{7}$ să se afle numerele cele mai mici de oi pe care le aveau cei 3 ciobănei.

I. Teodorașcu — G.M. nr. 9/1977

R: 448; 315; 182

5. Suma a două fracții cu același numărător este $1\frac{1}{15}$. Numitorii se află între ei în același raport cu numerele 1 : 3. Să se afle cele două fracții.

Antoneta Maftei — G.M. nr. 1/1981

R: $\frac{4}{15}$ și $\frac{4}{5}$

6. Să se arate că dacă $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{12}{c} = 13$, atunci:

$(3 - a)a + (4 - b)b + (12 - c)c = 12$
$(3 + a)a + (4 + b)b + (12 + c)c = 14$
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 8/1983

Soluție: Făcînd proporții derivate, obținem:

$\frac{3 - a}{a} = \frac{13 - 1}{1}$, de unde $3 - a = 12a$; analog $4 - b = 12b$; $12 - c = 12c$. Înlocuind, obținem: $(3 - a)a + (4 - b)b + (12 - c)c = 12(a^2 + b^2 + c^2)$.

Analog pentru a doua relație.

7. Să se determine numărul $\overline{abc}$ știind că numerele $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ sînt direct proporționale cu numerele 3, 2, 6, iar suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este divizibilă cu 7.

Ion Ilea — G.M. nr. 5/1983

R: $\overline{ab} = 21$; $\overline{bc} = 14$; $\overline{ca} = 42$; sau $\overline{ab} = 42$; $\overline{bc} = 28$; $\overline{ca} = 84$

8. Să se determine numerele $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{N}$ știind că $x > 1$ și $\frac{x}{3} = \frac{5x + 1}{3y + 2}$.

Aurel Ene — G.M. nr. 5/1987

Soluție: Condiția problemei se scrie astfel:

$x(3y - 13) = \frac{3}{2} \cdot 2$, de unde $x = \frac{3}{2}$ și $y = 5$.

9. Să se determine numerele întregi x și y prime între ele astfel încît fracția $\frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ să fie echivalentă cu fracția $\frac{5}{19}$

Bogdan Grigoriu — G.M. nr. 11—12/1987

R: $x = 2$; $y = 3$ sau $x = 3$; $y = 2$

10. Să se determine mulțimea perechilor de numere (a, b) care satisfac relația:

$\frac{\overline{ab}}{4a + 4b} = \frac{\overline{ba}}{7a + 7b}$, numerele fiind scrise în baza 10.

Gh. Palincaș — G.M. nr. 9/1981

R: (1, 2); (2, 4); (3, 6); (4, 8)

11. Să se determine toate tripletele de numere naturale (x, y, z) care verifică egalitățile: $\frac{8}{x} = \frac{6}{y} = \frac{z}{10}$.

Radu Spoială — G.M. nr. 11—12/1987

R: (4, 3, 20); (8, 6, 10); ...

12. Să se afle numerele naturale nenule x, y, z ce verifică egalitatea

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13}$$

V. Brînzănescu — G.M. nr. 2/1987

R: $x = 2$; $y = 6$; $z = 2$

13. Fie șirul de rapoarte egale $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{t}{5}$.

Știind că $xyzt = 1\,756\,920$, să se afle x, y, z, t.

Viorel Gh. Mocanu — G.M. nr. 4/1979

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Se notează cu k raportul, atunci $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$, $t = 5k$. Înlocuind în a doua relație, se obține $k = 121$, apoi $x = 242$, $y = 363$, ...

14. Fie șirul de rapoarte egale $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$. Știind că $xyz = 139\,755$, să se afle x, y, z.

Viorel Mocanu — G.M. nr. 2/1979

R: Vezi problema 18! Avem $x = 33$, $y = 55$, $z = 77$

15. Se dă șirul de rapoarte $\frac{1}{x} = \frac{4}{y} = \frac{8}{z} = \frac{2}{t}$. Să se afle x, y, z, și t știind că $xy = z = t^2$.

Grigore Ciocanea — G.M. nr. 1/1977

R: $x = 2$; $y = 8$; $z = 16$; $t = 4$

16. Să se determine cel mai mic număr întreg n care se împarte direct proporțional cu numerele $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{4}$, iar părțile obținute sînt numere întregi.

I. Teodorescu — G.M. nr. 2/1981

R: 2 401

17. 1) Să se arate că produsul termenilor unei proporții (numere întregi) este un pătrat perfect.

2) Să se scrie toate proporțiile în care produsul termenilor este 36, termenii fiind numere naturale diferite între ele.

Ioan Joldiș — G.M. nr. 3/1979

Soluție:

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sau $ab = cd$, atunci $abcd = (ab)^2$

2) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ și proporțiile derivate

18. Un şir de 5 numere este astfel format încît primele 3 numere sînt proporţionale cu 4, 5, 6, iar ultimele 3 numere sînt invers proporţionale cu 4, 5, 6.

a) Să se afle cele mai mici numere care satisfac condiţiile puse.

b) Care ar fi şirul de 5 numere care satisfac condiţiile cerute, iar suma lor este 476?

Gh. Drăgan — G.M. nr. 6/1981

Soluţie: Condiţiile problemei devin $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$ şi $\frac{c}{\frac{1}{4}}=\frac{d}{\frac{1}{5}}=\frac{e}{\frac{1}{6}}$, de unde $a=1$; $b=\frac{5}{4}$; $c=\frac{3}{2}$; $d=\frac{6}{5}$; $e=1$

b) $a=80$; $b=100$, $c=120$; $d=96$; $e=80$

19. Să se împartă numărul 10 în părţi invers proporţionale cu numerele 1, 2, 3, 4, 5.

x x x — G.M. nr. 11—12/1986

20. Să se găsească 3 numere x, y, z a căror sumă este S, ştiind că x şi y sînt direct proporţionale cu $\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{6}$, iar y şi z sînt invers proporţionale cu 15 şi 9.

Care este cea mai mică sumă S ca x, y, z să fie numere naturale?

Minică Ionescu — G.M. nr. 5/1987

R: $x=12$; $y=6$; $z=10$; $S=28$

Scanned with OKEN Scanner

E. MEDIA ARITMETICĂ ŞI MEDIA GEOMETRICĂ

1. Media aritmetică a două numere naturale este 7. Un număr este $\frac{3}{4}$ din celălalt. Să se afle numerele.

Antonius Popa — G.M. nr. 7—8/1987

R: $x = 6$; $y = 8$; $m = \frac{a + b}{2}$

2. Să se afle media aritmetică a numerelor naturale a şi b ştiind că fracţiile $\frac{2}{a}$ şi $\frac{5}{b}$ sînt echivalente, iar $a + b = 49$.

Liviu Terec — G.M. nr. 10/1986

R: $a = 14$; $b = 35$; $m_a = \frac{49}{2}$

3. Media aritmetică a 8 numere naturale este 32. Primul număr este mai mare de două ori decît al doilea, iar media aritmetică între al doilea şi al treilea număr este 35. Să se afle numerele

Lăcrămioara şi Carmen Jiplea — G.M. nr. 1/1987

R: $x = 26$; $y = 52$; $z = 18$

4. Media aritmetică a 49 de numere naturale consecutive este 105. Să se afle numerele.

Concurs Suceava — G.M. nr. 8/1988

R: 81; 82; 83; ...; 129.

5. Media aritmetică a 4 numere naturale este 30. Să se afle cele 4 numere ştiind că media aritmetică a primelor 3 numere este

82, media aritmetică a ultimelor 8 este 29, iar al treilea număr este egal cu $\frac{3}{4}$ din al patrulea.

Ion Trică — G.M. nr. 4/1988

R : a = 33 ; b = 45 ; c = 18 ; d = 24

6. Să se afle 3 numere știind că două cîte două au media aritmetică egală respectiv cu 13, 17 și 16.

Maria Enescu — G.M. nr. 3/1978

R : 14 ; 12 ; 20

7. Să se găsească 3 numere naturale care îndeplinesc simultan următoarele condiții :

a) media lor aritmetică este un număr natural par ;

b) primul număr este par, mai mare decît 30 și mai mic decît 40 ;

c) al doilea număr este de 3 ori mai mare decît primul ;

d) al treilea număr este cu 6 mai mic decît al doilea.

Ileana Mănescu — G.M. nr. 7/1977

Soluție : a = 2k ; $30 < 2k < 40$; b = 6k ; c = 6k — 6 ; (2k + 6k + 6k — 6) : 3 $\in$ N și par : a = 36 ; b = 108 ; c = 102

8. Media aritmetică a 4 numere naturale este cel mai mare număr natural cu 3 cifre divizibil cu 6. Al doilea număr este cu 2 mai mare decît primul, al treilea cu 4 mai mare decît al doilea și cel de al patrulea număr este cu 6 mai mare decît al treilea. Să se determine cele 4 numere

Katalin Kürthy — G.M. nr. 8/1977

R : a = 991 ; b = 993 ; c = 997 ; d = 1 003

9. Suma a 5 numere este 175. Știind că al treilea este media aritmetică a celorlalte și că toate sînt divizibile cu 5, considerate în ordine, să se afle numerele.

Stela Tomulescu — G.M. nr. 2—3/1982

R : a = 25 ; b = 30 ; c = 35 ; d = = 40 ; e = 45

Scanned with OKEN Scanner

10. Calculați media aritmetică a numerelor :

$$N_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1981}$$

$$N_2 = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \ldots + \frac{3\,960}{3\,962}$$

Iulian C. Mazilu — G.M. nr. 2—3/1982

Soluție : $N_1 + N_2 = 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\right) +$

$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{6}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1981} + \frac{3\,960}{3962}\right) = 1 + 1 + 1 + 1 +$

$+ 1 + \ldots + 1 = 1\,982$

Media aritmetică va fi $\frac{N_1 + N_2}{2} = 991$.

11. Să se calculeze media geometrică a numerelor $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1978$ și $B = \frac{1\,979}{989}$.

N. Ivășchescu — G.M. nr. 2/1981

Soluție : Media geometrică a numerelor A și B este dată de formula $m_g = \sqrt{A \cdot B}$. În cazul nostru avem :

$$A = \frac{(1 + 1\,978) \cdot 1\,978}{2} = \frac{1\,979 \cdot 1\,978}{2} = 1\,979 \cdot 989$$

$$m_g = \sqrt{\frac{1\,979 \cdot 1\,978 \cdot 989}{989}} = 1\,979$$

12. Media geometrică a două numere este $30\sqrt{6}$, iar media lor aritmetică este 75. Să se afle media armonică a acestor două numere.

Renete Stirner — G.M. nr. 1/1979

R : $a = 40$; $b = 35$; $m_{armonică} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{112}{3}$

13. Fie numărul natural $A = \overline{abcda}$ multiplu de 45.

1) Să se demonstreze că și $B = \overline{dcbaa}$ este divizibil cu 45.

2) Cîte numere A există dacă $b \neq c \neq d \neq a$?

3) Să se determine numărul A dacă b este cea mai mare cifră număr prim și c este media aritmetică a cifrelor a și b.

Olah Mikloș — G.M. nr. 7/1981

Soluție: 1) Din condițiile problemei rezultă $a = 5$ și $A = \overline{5bcd5}$. Cum $b \oplus c \oplus d \oplus 10 = M9$, rezultă că și $B = \overline{dbc55}$ este divizibil cu 45.

2) Din condiția de divizibilitate cu 9 și $b \neq c \neq d \neq a$, avem: $A = \{ 54\,615, 55\,215, 57\,105, 57\,645, 57\,825, 57\,915, 56\,745, 56\,835, 56\,925, 58\,725, 58\,635, 58\,905, 59\,715, 59\,805, \ldots \}$ Cifrele b, c, d se pot permuta între ele.

3) $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$, $A = 57\,645$

14. Există numere întregi x, y, z care să satisfacă condițiile:

a) y este media geometrică a lui x și z;
b) z este media aritmetică a lui x și y;
c) expresia $x \oplus y \oplus z$ este pătrat perfect?

Ioan Crișan — G.M. nr. 10/1985
R: (3, 3, 3)

15. Să se determine numerele de forma $\overline{xyz}$ știind că media geometrică a numerelor $\overline{xyz}$ și 42 este un număr natural între 100 și 200.

Florentin Smarandache G.M. nr. 6/1984

Soluție: Trebuie determinat k astfel încît $k = \sqrt{\overline{xyz} \cdot 42}$ și $100 < k < 200$ rezultă $\overline{xyz} = 42 \cdot l^2$, deci $k = l \cdot 42$ și $100 < l \cdot 42 < 200$. Avem: 378 și 672.

16. Media proporțională a numerelor 60 și x este un număr natural mai mic decît 100. Să se afle x.

Ion Pascaru — G.M. nr. 6/1983
R: Vezi problema nr. 12! 15; 60

Capitolul al IV-lea

FRACȚII ZECIMALE. TRANSFORMAREA FRACȚIILOR ZECIMALE PERIODICE ÎN FRACȚII ORDINARE ȘI INVERS

1. Fără a efectua suma, să se arate că egalitatea

$$\frac{1}{5} + 2^4 \cdot 5^3 + \frac{1}{20} + 2^2 \cdot 5^3 + \frac{1}{125} + 2^4 \cdot 5 = 2\,580,258$$ este adevărată.

Ilieș Mariș — G.M. nr. 4/1982

Soluție: Membrul stîng se scrie astfel:

$$\frac{2}{10}^3 \cdot 2 + \frac{5}{100} + 10^2 \cdot 5 + \frac{8}{1000} + 10 \cdot 8 = 0{,}2 +$$
$$+ 1000 \cdot 2 + 0{,}05 + 100 \cdot 5 + 0{,}008 + 10 \cdot 8 = 2580{,}258.$$

2. Să se afle primele 5 cifre ale numărului

$$\frac{1{,}2345 \ldots 54321}{9{,}8765 \ldots 56789}$$

Romulus Banu — G.M. nr. 9—10/1982
R: 0,12499

3. Fie $\frac{x}{0,(1)} \cdot \frac{y}{0,(2)}$ și $\frac{y}{0,(5)} = \frac{z}{0,(3)}$ cu $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Să se afle x, y, z știind că $x + y + z = 123$.

Viorel Gh. Mocanu — G.M. nr. 8/1981

Soluție: Transformarea fracțiilor periodice simple în fracții ordinare.

$\frac{x}{\frac{1}{9}} = \frac{y}{\frac{1}{8}}$ și $\frac{y}{\frac{5}{9}} = \frac{z}{\frac{7}{9}}$. Amplificăm prima proporție cu $\frac{8}{5}$ pentru ca y să aibă același numitor în ambele proporții și obținem :

$$\frac{x}{\frac{5}{27}} = \frac{y}{\frac{5}{9}} = \frac{z}{\frac{7}{9}} = \frac{x + y + z}{\frac{5}{27} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9}} = \frac{126}{\frac{41}{27}} = 81$$

obținem $x = 15$; $y = 45$; $z = 63$.

4. a) Să se determine x din egalitatea :

$$\frac{8\frac{8}{15}\left\{\left[0,2 + x\left(1\frac{1}{8} - 1,2\right)\right] \cdot 1(6)\right\}}{2,1(3)} = \frac{2^{33}}{2^{15}}$$

b) Să se afle valoarea lui a pentru care numărul $\overline{94xa}$ este divizibil cu 36.

Mariș Ilieș — E 7093

R : $x = 8$; $a = 2$.

5. Pentru care cifre a și b din baza 10 este adevărată egalitatea $\frac{a}{b} = \overline{b,a}$?

Nicolae Păuna — G.M. nr. 2—8/1982

R : $a = 5$; $b = 2$. Demonstrați că soluția este unică.

6. Să se determine cifrele a, b, c, d în baza 10 astfel încît :

$$\frac{a}{b + c + d} = 0,\overline{abc}$$

D.M. Bătinețu — G.M. nr. 1/1977

Soluție : Condiția problemei se scrie astfel :

$$2^3 \cdot 5^3 \cdot a = \overline{abc}(a + b + c).$$

Pentru $a = 1$ luăm $5^3 = \overline{abc}$ și $2^3 = a + b + c$, se obține $b = 2$, $c = 5$ și $d = 1$. Verificare: $\frac{1}{2 + 5 + 1} = 0{,}125$

II. Pentru $a = 2$ luăm $5^3 \cdot 2 = \overline{abc}$ și $2^3 = a + b + c$ se obține $b = 5$, $c = 0$, $d = 3$. Verificare: $\frac{2}{5 + 0 + 3} = 0{,}250$.

Încercați pentru $a \geq 3$.

7. Să se determine cifrele x, y, z, t în sistemul de numerație cu baza 10, așa ca să avem egalitatea:

$$\frac{1}{x + y + z + t} = \frac{1}{\overline{0{,}0xyz}}$$

Iulian Coroian — G.M. nr. 1/1977

R: $x = 6$, $y = 2$, $z = 5$, $t = 3$

8. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural n, fracția $\frac{1}{n^4 + n^2 + 1}$ este o fracție periodică simplă.

Liliana Niculescu — G.M. nr. 6/1978

Soluție: Pentru ca fracția să fie periodică simplă, trebuie ca $n^4 + n^2 + 1$ să nu aibă ca divizori nici pe 2 sau puteri ale acestuia și nici pe 5 sau puteri ale acestuia.

Față de numărul 2 orice număr natural are una din formele $2k$ sau $2k + 1$.

Față de numărul 5, orice număr natural are una din formele $5k$; $5k \pm 1$; $5k \pm 2$. Dar $n^4 + n^2 + 1$ se mai scrie și astfel: $n^4 + 2n^2 + 1 - 2n^2 = (n^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}n)^2 = (n^2 - \sqrt{2} \cdot n + 1) \cdot (n^2 + \sqrt{2} \cdot n + 1)$.

Înlocuind valorile de mai sus se observă că $n^4 + n^2 + 1 \neq M2$ și $n^4 + n^2 + 1 \neq M5$. Deci fracția dată este periodică simplă.

9. Să se reconstituie adunarea $\overline{abcd} + \overline{efgh} = 9\,276$, știind că:

$$\frac{h+d}{e+a}=0{,}75\ (1);\quad \frac{g+c}{f+b}=1{,}(54)\qquad (2)$$

$$\frac{h-d}{4}=\frac{a-e}{12}=\frac{c-g}{2}=\frac{7-b}{2}>0\qquad (3)$$

C.D. Dinu — G.M. nr. 5/1981

Soluție: Condițiile (1), (2), (3) devin: $4(h+d)=3(e+a)$; $11(g+c)=17(f+b)$; $h>d$; $a>e$; $c>g$; $f>b$. Se obține: $1\,592+7\,684=9\,276$.

10. Arătați că:

$$\overline{x,(y)}+\overline{y,(z)}+\overline{z,(x)}=\overline{x,y(z)}+\overline{y,z(x)}+\overline{z,x,(y)}$$

numerele fiind scrise în baza 10.

Ioan Hereșanu — G.M. nr. 6/1984

Soluție: Transformăm fracțiile periodice simple și mixte în fracții ordinare:

$$\overline{x,(y)}+\overline{y,(z)}+\overline{z,(x)}=x\,\frac{y}{9}+y\,\frac{z}{9}+z\,\frac{x}{9}=\frac{9x+y}{9}+$$

$$+\frac{9y+z}{9}+\frac{9z+x}{9}=\frac{10}{9}(x+y+z).$$ Analog avem:

$$\overline{x,y(z)}+\overline{y,z(x)}+\overline{z,x(y)}=x\,\frac{\overline{yz}-y}{90}+y\,\frac{\overline{zx}-z}{90}+z\,\frac{\overline{xy}-x}{90}=$$

$$=\frac{90x+10y+z-y}{90}+\frac{90y+10z+x-z}{90}+$$

$$+\frac{90z+10x+y-x}{90}=\frac{10}{9}(x+y+z).$$

11. Să se calculeze:

$$-\max\{3,(3);\ 3,0(3);\ 3,1(3)\}-\min\{0;\ 0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}001\}+$$

$$+\frac{\max\{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}25\}\cdot\min\{2;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ 2{,}1\}}{\max\left\{2\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{3};\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{1}{5}\right\}-\min\{2;\ 2{,}1;\ 2{,}01;\ 2{,}001\}}$$

$$R:\ -\frac{7}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

12. Dacă $\frac{a}{b} = 0,(285714)$ și cel mai mare divizor al acestor numere este $(a,b) = 1$, să se calculeze $\frac{5a + 7b}{a + 18b}$.

Elisabeta Szántó — G.M. nr. 11/1979

R ; $\frac{59}{98}$

13. Să se determine, fără a folosi împărțirea, cifrele x, y și z astfel ca numărul zecimal $0,xy(xz)$ să fie egal cu numărul $\frac{49}{132}$.

Romeo Munteanu — G.M. nr. 10/1977

Soluție: $\frac{\overline{xyzz} - \overline{xy}}{9900} = \frac{49}{132}$ sau $990x + 99y + 10z + z = 3\,675$. Se obține $x = 3$, $y = 7$, $z = 1$.

14. Să se determine cifrele x, y astfel încît $\frac{1}{x + y - 1} = \overline{0,x(y)}$, unde $\overline{0,x(y)}$ este fracție periodică de perioadă y.

D.M. Bătinețu — G.M. nr. 1/1977

R ; $x = 1$; $y = 6$

15. Să se transforme numărul rațional $\frac{1}{13}$ în număr zecimal și să se determine cea de-a 101 zecimală după virgulă.

E. Rogai — G.M. nr. 8/1979

Soluție: $\frac{1}{13} = 0,(076923)$ Perioada are 6 cifre deoarece $10^6 - 1 = M13$.

Dar $101 : 6 = 16$ (rest 5), deci perioada se repetă de 16 ori, apoi a cincea cifră din perioada a 17-a va fi 2.

16. Numărul elevilor unei clase este format din două cifre, iar raportul dintre numărul fetelor și al băieților este $0,58(3)$. Să se afle numărul fetelor și al băieților.

I. Zaharia — G.M. nr. 11/1978

R: 7 fete și 12 băieți din calculul direct. Dar cum într-o clasă sînt mai mulți elevi, soluția reală va fi 14 fete și 24 băieți.

17. Să se afle două numere știind că cel mai mare divizor comun al lor este 500, iar cîtul lor este $0,5(6)$.

Ilie Florescu — G.M. nr. 10/1978

R: $a = 8\,500$; $b = 15\,000$

18. Să se afle un număr rațional care îndeplinește simultan condițiile:

1) Partea întreagă a numărului este 0.

2) Numărul este periodic simplu cu perioada formată din 4 cifre și anume:

a) cifra de pe locul 87 după virgulă este 1;

b) cifra de pe locul 5 686 după virgulă este 4;

c) cifra de pe locul 595 după virgulă este suma cifrelor de pe locurile 1 și 2 după virgulă;

d) cifra de pe locul 4 după virgulă mărită cu 4 ne dă cît suma cifrelor de pe locurile 1, 2, 8 după virgulă.

M. Costeniuc — G.M. nr. 12/1980

R: $0,(1456)$

19. Să se determine toate fracțiile de forma $\frac{\overline{ab}}{c}$, astfel ca $\frac{\overline{ab}}{c} = \overline{a,(a)}$, unde a, b, c sînt cifre distincte în baza 10 ($a \neq 0, c \neq 0$).

R: $b = 0$, $c = 9$, $a \in \{1, 2, 8, \ldots, 8\}$.

20. a) Să se calculeze:

$234 : 888,8 \cdot 44,44 : 0,468 \cdot 11,111 : 2\,222,2 \cdot 0,(142857)$.

b) Care dintre numerele $[0,(x)]^*$ și $(0,x)^*$, unde $x \in \{1,2,3,\ldots,9\}$ este mai mare?

Concurs de matematică, 1979

R: a) $\frac{1}{56}$; b) Primul e mai mare.

21 Să se determine numărul $n = \overline{abcde}$ cu proprietatea că $\overline{ab} = 0,43(18) \cdot \overline{cde}$ și apoi să se afle cel mai mic număr natural m pentru care $m \cdot n$ este pătrat perfect.

Romeo Munteanu — G.M. nr. 6/1983

Soluție: Condiția problemei se scrie: $\overline{ab} = \frac{171}{396} \cdot \overline{cde}$ sau $3^2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot \overline{ab} = 3^2 \cdot 19 \cdot \overline{cde}$. De unde avem $\overline{ab} = 57$, $\overline{cde} = 132$; $n = 57\,132 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 23^2$ Pentru ca $m \cdot n = k^2$, rezultă $m = 3$.

22. Se dă egalitatea

$\overline{0,x(y)} - \overline{0,y(x)} = 0,0(1) \cdot 8$ numerele fiind scrise în baza 10. Să se afle mulțimea perechilor (x, y) ce verifică această egalitate.

Mircea Albu — G.M. nr. 10/1977

R: Condiția devine $x - y = 1$, de unde avem perechile (1, 0); (2, 1); (3, 2); (4, 3); (5, 4); (6, 5); (7,6); (8, 7); (9, 8)

23. Să se afle mulțimea de perechi (x, y) care verifică egalitatea $\overline{0,xx(y)} - \overline{0,yy(x)} = \frac{1}{5}\left(0,98(1) + \frac{97}{900}\right)$ numerele fiind scrise în baza 10.

Mihai N. Ionescu — G.M. nr. 10/1987

R: (2, 0); (3, 1); (4, 2); (5, 3); (6, 4); (7, 5); (8, 6); (9, 7)

24. Să se determine cifrele a, b, c consecutive în baza 10, știind că ele verifică egalitatea

$$\overline{ab,(c)} + \overline{bc,(a)} + \overline{ca,(b)} = 100$$

Damiel Cojocaru — G.M. nr. 2—3/1982

R: a = 2; b = 8; c = 4

25 Să se determine cifrele x, y, z în baza 10 care satisfac simultan condițiile:

a) $\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)} = 10$

b) $x > y > z > 0$

Petre Năchilă — G.M. nr. 4/1981

R: (6, 2, 1); (5, 8, 1); (4, 8, 2)

26. Să se determine cifrele a, b și c în baza 10 unde $a < b < c$ astfel încît să avem: $\overline{0,ab(c)} + \overline{0,bc(a)} + \overline{0,ca(b)} = 1$

Toma Popa și Florea Gruia — G.M. nr. 4/1982

R: (1, 2, 6); (1, 8, 5); (2, 8, 4)

27 Să se determine cifrele a, b, c, d în baza 10, cu $a < b < c < d$ astfel încît să avem:

$$\overline{0,a(b)} + \overline{0,b(c)} + \overline{0,c(d)} + \overline{0,d(a)} = \overline{a,(a)}$$

Radu Urzicanu — G.M. nr. 7/1982

R: a = 1; b = 2; c = 8; d = 4

28. Să se determine a, b, c ∈ {1, 2, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9} astfel încît $0,(abc) = \frac{1}{3}\left[\overline{0,(a)} + \overline{0,(b)} + \overline{0,(c)}\right]$

Marius Burtea — G.M. nr. 2/1980

Soluție: Condiția problemei devine $\overline{abc} = 37(a + b + c)$. Se obțin mai multe soluții:

a = 4, b = 8, c = 1

a = 5, b = 1, c = 8

29 Să se determine cifrele x, y, z, t știind că sînt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\overline{x,y(z)} + \overline{y,z(x)} + \overline{z,x(y)} = \overline{t,(t)}$;

b) x, y, z, t sînt diferite două cîte două;
c) cel puțin 3 cifre sînt semnificative;
d) numărul soluțiilor este minim.

R: $x = 0$; $y = 1$; $z = 2$; $t = 3$. Mai sînt și alte soluții?

30. Să se afle x, y, z din egalitatea

$\overline{0,xy(z)} + \overline{0,yz(x)} + \overline{0,zx(y)} = 1,(6)$ știind că $x < y < z$ sînt cifre impare consecutive din șirul natural al numerelor; numerele sînt scrise în baza 10.

Gh. Hulea — E 7125*

R: $x = 3$; $y = 5$; $z = 7$

31. Există cifre a și b pentru care

$\overline{ab} + \overline{0,a(b)} + \overline{0,b(a)} = \overline{a,(b)} + \overline{b,(a)}$?

Marin Stoica și G. Stoica — G.M. nr. 7/1978

R: $a = 0$, $b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

32. Fie fracțiile zecimale $\overline{0,x}$ și $\overline{0,(x)}$.

a) Să se afle mulțimea valorilor lui x, pentru care $\overline{0,x} + \overline{0,(x)} \leq 1$

b) Să se afle mulțimea valorilor lui x, pentru care $0,x + \overline{0,(x)} > 1$

Cum se justifică faptul că mulțimile obținute sînt disjuncte?

Adina Ștefănescu — G.M. nr. 11—12/1980

R: a) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $x \geq 6$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al V-lea

RADICALI. RĂDĂCINI PĂTRATICE, CUBICE, BIPĂTRATE

1. Să se calculeze media geometrică și aritmetică a numerelor $N_1 = \sqrt{98} + \sqrt{32}$ și $N_2 = \sqrt{162} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$

Ionel Manta — G.M. nr. 11/1977

R: $N_1 = 6\sqrt{2}$; $N_2 = 6\sqrt{2}$; $m = 6\sqrt{2}$; $m_g = 6\sqrt{2}$

2. Să se arate că

a) $\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{20}{4} + 5} + \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{125}{121} - \frac{100}{44}} +$

$$+ \sqrt{\frac{125}{121} + \frac{25}{9} - \frac{50}{33}} = \frac{10}{3};$$

b) $\sqrt{\frac{5}{49} - \frac{4}{14} + \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{5}{49} - \frac{2}{21} + \frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 2} +$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \sqrt{13}.$$

C. Ionescu — G.M. nr. 7/1984

3. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele:

$$\sqrt{\frac{3^3 - 2^3}{5^2 - 2^2}}; \quad \sqrt{\frac{\sqrt{2^6}}{3 + 2^3 : 2}}; \quad \sqrt{\frac{2^4 + 5}{2^2\left(\frac{10^2 - 2^6}{3^2} + 1\right)}}.$$

fiecare fiind aproximat cu 0,01 prin lipsă.

Mihai Ionescu — G.M. nr. 4/1983

R: $A < B < C$, unde A,B,C sînt radicalii în ordinea dată.

4. Să se afle x din proporția:

$$\frac{x\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{6 \cdot 1,(6)}{\sqrt{0,0016}}, \text{ știind că } a = \frac{1}{2} \text{ și } b = \frac{1}{50}.$$

V. Mihăescu — G.M. nr. 5/1982

R: $x = 650$

5. Să se calculeze suma:

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1988}+\sqrt{1987}}$$

Iuliu Ursu — G.M. nr. 7—8/1987

Soluție:

$$1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \ldots + \frac{\sqrt{1987}-\sqrt{1986}}{1987-1986} +$$

$$+ \frac{\sqrt{1988}-\sqrt{1987}}{1988-1987} = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{1987} -$$

$$- \sqrt{1986} + \sqrt{1988} - \sqrt{1987} = 1 + \sqrt{1988} = 1 + 2\sqrt{497}.$$

6. Să se precizeze dacă numărul $A = \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} - 6$ este pozitiv, negativ sau nul.

Test de matematică G.M. nr. 12/1984

Soluție:

Metoda I. Egalitatea din enunț se mai scrie $A + 6 = \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}}$. Prin ridicare la pătrat și reducerea termenilor asemenea se obține ecuația $A^2 + 12A + 30 = 0$, ambele soluții fiind negative, deci $A < 0$.

Metoda a II-a. Utilizăm formulele radicalilor dubli:

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $c^2 = a^2 - b$. În cazul nostru avem: $\sqrt{4 \pm \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{4+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{4-1}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, $c^2 = 4^2 - 15 = 1$; $c = 1$. $A = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} -$

$- \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - 6$; deci, $A = 2\sqrt{\frac{3}{2}} - 6$, $A < 0$.

7. Să se arate că numărul:

$N = \sqrt{2^4} + \sqrt{\frac{5}{0,0(2)}} + \sqrt{\frac{55}{0,0(02)}} + \sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$ este pătrat perfect.

P. Bîrleanu — G.M. nr. 3/1979

R: 43^2

8. Rădăcina pătrată din produsul numerelor mixte $8\frac{a}{16}$ și $3\frac{b}{25}$ este egală cu $8\frac{3}{20}$. Să se determine a și b.

Gh. Bucur — G.M. nr. 2/1979

Soluție: Din condiția problemei se ajunge la

$\frac{(48+a)}{4^2} \cdot \frac{(75+b)}{5^2} = \frac{7^2}{4^2} \cdot \frac{9^2}{5^2}$, de unde $a = 1$ și $b = 6$.

9. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, dacă $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} = 1\,972$ ($\sqrt[3]{p}$ fiind numărul q astfel încît $q^3 = 8$).

Nistor Budescu — G.M. nr. 8/1985

Soluție: Aducînd radicalii la același indice, obținem: $\sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^4} = 15\,972$. Notăm $\sqrt[6]{x} = y$, atunci egalitatea devine: $y^3 + y^4 = 11^3 \cdot 12$, deci $y = 11$, adică $x = 11^6$.

10. Se știe că $\overline{46ab}$ este un număr scris în baza 10, pătrat perfect și divizibil cu 5, iar rădăcina sa pătrată este un număr de 3 cifre în baza 10. Să se afle această rădăcină.

V. Ghizdavu — G.M. nr. 1/1983

Soluție: $\overline{46abc} = \overline{xyz}^2$, $z \in \{0, 5\}$.

Dacă $c = 0$ și $\overline{46abc}$ începe cu 4, rezultă $x = 2$, deci $\overline{46ab0} = \overline{2y0}^2$. Dar $44\,100 < \overline{46ab0}$, nu avem soluție.

Dacă $c = 5$, atunci $\overline{46ab5} = \overline{2y5}^2$, rezultă $44\,100 < \overline{46ab5} < 48\,600$ sau $210 < \overline{2y5} < 220$, obținem unicul număr 215.

11. Să se determine cifrele a și b, scrise în baza 10, știind că $\sqrt{\overline{ab}} = a + b$.

Francisc Csaki — G.M. nr. 5/1987

R: $a = 9$ și $b = 1$

12. Să se determine toate numerele naturale $\overline{xy}$ astfel încît

$$\sqrt{\frac{\overline{xy} + 24}{\overline{xy} - 24}}$$

Maria și Nicolae Vizuroiu — G.M. nr. 6/1987

Soluție:

$\sqrt{\dfrac{\overline{xy} + 24}{\overline{xy} - 24}} = k$. Ridicînd la pătrat și efectuînd calculele se ajunge la $(k^2 - 1)(10x + y - 24) = 2^4 \cdot 3$

1) $k^2 - 1 = 3$, cond ce la $k = 2$ și $\overline{xy} = 40$;

2) $k^2 - 1 = 8$, conduce la $k = 3$ și $\overline{xy} = 30$;

3) $k^2 - 1 = 48$, conduce la $k = 7$ și $\overline{xy} = 25$.

13. Să se determine numărul prim $\overline{ab}$ știind că partea întreagă a numărului $\sqrt{\overline{ab}}$ este 6 și că suma cifrelor numărului este 5.

Ligia Chiroiu — G.M. nr. 10/1987

R: 41.

Scanned with OKEN Scanner

14. Aflați numărul $\overline{abcd}$ știind că $\sqrt{5\sqrt{\overline{abcd}}}$ este număr natural.

Ion Ilea — G.M. nr. 7/1985

Soluție: $\sqrt{\overline{abcd}}$ să fie de forma $5k^2$, adică $\overline{abcd} = 25k^4$. Dacă $k = 3$, rezultă $k^4 = 81$ și $25k^4 = 2\,025$, deci $\sqrt{2\sqrt{2025}} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 15 \in \mathbb{N}$; $\overline{abcd} = 2\,025$. Mai sînt și alte soluții?

15. Aflați numărul $\overline{abcd}$ știind că $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{\overline{abcd}}}}$ este număr natural.

D. Săvulescu — G.M. nr. 4/1988

R: $\overline{abcd} = 5\,184$. Vezi problema nr. 14!

16. Să se găsească cel mai mic număr natural diferit de zero cu care trebuie să înmulțim numărul 15 012, pentru ca rădăcina pătrată a produsului obținut să fie un număr natural.

Laurențiu Gaiu — Concurs de matematică

R: $3 \cdot 139 = 417$. Vezi problema 14!

17. Se cer numerele de forma $\overline{abcd}$ știind că suma cifrelor sale este un număr egal cu rădăcina pătrată a numărului de 3 cifre $\overline{d(a+1)c}$.

C. Scripcanu — G.M. nr. 5/1986

Soluție: Condiția problemei se scrie

$$a + b + c + d = \sqrt{\overline{d(a+1)c}}$$

1) Din $\sqrt{144} = 12$ conduce la $d = 1$, $a = 3$, $c = 4$, $b = 4$;

2) Din $\sqrt{529} = 23$ conduce la $d = 5$, $a = 1$, $c = 9$, $b = 8$, adică 3 441 și 1 895. Mai sînt și alte soluții?

18. Să se găsească mulțimea valorilor naturale ale lui y pentru care $\sqrt{35 + y^2}$ este număr natural.

Micu Dorin — G.M. nr. 2/1973

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $\sqrt{35 + y^2} = k$ sau $y^2 - k^2 = 35$ sau $(y - k)(y + k) = 1 \cdot 35$, respectiv $(y - k)(y + k) = 5 \cdot 7$. Numai $y = 1$ și $y = 17$ verifică condițiile problemei.

19. Să se determine numerele naturale x, y, z∈ [1, 20] care verifică egalitatea $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z}$.

Liviu Pîrșan — G.M. nr. 2/1978

R: (1, 1, 4); (1, 4, 9); (1, 9, 16); (2, 2, 8); ...
Găsiți și alte triplete de numere.

20. Să se afle x și y din egalitatea $\sqrt{\overline{xyx}} = \overline{xx}$. Numerele sînt scrise în baza 10.

Eugen Dușcă — G.M. nr. 2/1981

R: x = 1; y = 1 și x = 4, y = 8

21. Pentru cîte perechi de forma (k, n) propoziția E∈ Q este adevărată, unde k∈ {0, 1, 2, 3, ... , 20} n∈ ℕ și $E = 7\sqrt{2} - (-1)^{3k+1}\sqrt{3n + 8} + 1\,985$?

D. Săvulescu — G.M. nr. 11/1985

R: (1, 30); (3, 30); ... ; (19, 30), în total sînt 10 perechi.

22. Să se determine cifrele distincte x, y, z știind că numerele naturale scrise în baza 10 verifică relația:

$$\sqrt{\overline{xyy}} + \sqrt{\overline{yyx}} = \overline{zz}.$$

Grigore Preoteasa — G.M. nr. 8/1982

R: x = 1; y = 2; z = 3

23 Fie numerele $a = 2^{2^{2^{2^3}}} - 1$ și $b = \sqrt{65\,536^4 + 2 \cdot 65\,535^2 - 131\,071^2}$. Să se arate că b și $\frac{b}{a}$ sînt numere naturale.

Mina Merlă — G.M. nr. 3/1980

Cd. 32 coala 12

Soluție: $a = 65\,537 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 8$, deci $a \in \mathbb{N}$

Pentru calculul lui b notăm $x = 65\,536$, atunci

$$b = \sqrt{x^4 + 2(x-1)^2 - (2x-1)^2} = \sqrt{(x^2-1)^2} = (x-1)(x+1).$$

Deci $b = 65\,535 \cdot 65\,537$, $b \in \mathbb{N}$ și $\frac{b}{a} = 257 \in \mathbb{N}$.

24. Să se demonstreze că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și orice $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[4k]{n^5 - n + 2} \notin \mathbb{Q}$$

Ovidiu N. Badea — G.M. nr. 1/1983

Soluție: Demonstrația se face prin reducere la absurd. Presupunem că $\sqrt[4k]{n^5 - n + 2}$, adică există o fracție $\frac{p}{q}$ ireductibilă astfel ca

$$\sqrt[4k]{n^5 - n + 2} = \frac{p}{q} \text{ sau } q^{4k}(n^5 - n + 2) = p^{4k} \quad (1)$$

Cum $(p, q) = 1$ rezultă $n^5 - n + 2 = Mp$ sau $p = M(n^5 - n + 2)$, deci relația (1) se scrie $q^{4k} \cdot Mp = p^{4k}$ (2)

Dacă $\frac{p}{q}$ este ireductibilă, atunci și $\frac{p^{4k}}{2^{4k}}$ este tot ireductibilă (3).

Înlocuind pe (2) în (3), obținem $\frac{p^{4k}}{q^{4k}} = \frac{q^{4k} \cdot Mp}{q^{4k}} = Mp$,

deci $\frac{p^{4k}}{q^{4k}}$ este reductibilă, contrazice afirmația (3), deci presupunerea făcută este falsă. Așadar $\sqrt[4k]{n^5 - n + 2} \in \mathbb{Q}$ Analog dacă $p = M(n^5 - n + 2)$.

25. Să se arate că $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Q}$ oricare ar fi a, b numere naturale impare.

Ion Pîrșe — G.M. nr. 7/1983

R: Vezi problema nr. 24!

26. Să se determine x din egalitatea:

$$\left[\left(\frac{1}{11}\cdot x+\frac{1}{22}\right)\cdot\sqrt{121\sqrt{2^{2^2}}}\right]:\frac{2,(2)+2}{1,(1)+1}=2\frac{2}{22}-1\frac{1}{11}$$

Iuliu Mazilu — G.M. nr. 4—5/1984

R: $x=\frac{27}{22}$

27. Se dau numerele:

$$a=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{8}:0,25\right)-0,(3)+\frac{1}{30};$$

$$b=1-0,(54)\cdot\frac{11}{6}\text{ și }c=\frac{\sqrt{32}-\sqrt{27}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}.$$

Să se calculeze valorile expresiilor:

$$\sqrt{a+b+c+1};\quad c^0;\quad\sqrt{c^6};\quad\sqrt{\left(\frac{2}{c}\right)^6};\quad\sqrt{\left(\frac{1}{-4c}\right)^6}$$

Mihai Doroftei — G.M. nr. 2—3/1982

28 Să se calculeze:

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot7\cdot49+2\cdot14\cdot98+3\cdot21\cdot147+4\cdot28\cdot196+\ldots}{1\cdot5\cdot25+2\cdot10\cdot50+3\cdot15\cdot75+4\cdot20\cdot100+\ldots}}:\frac{7}{325}$$

știind că atît la numărător cît și la numitor numărul termenilor este același și finit.

Stela Cobzaș — G.M. nr. 10/1981

Soluție: $1\cdot7\cdot49+2(1\cdot7\cdot49)+3(1\cdot7\cdot49)+\ldots$ $\ldots n(1\cdot7\cdot49)=7^3(1+2+\ldots+n)=\frac{7^3\cdot(n+1)n}{2}$. Analog avem $1\cdot5\cdot25+2(1\cdot5\cdot25)+3(1\cdot5\cdot25)+\ldots+n(1\cdot5\cdot25)=\frac{5^3(n+1)n}{2}$. Înlocuind, obținem 65.

Putem lăsa sumele $1+2+\ldots+n$ neefectuate sub radical și se obține același rezultat.

29. Se dau numerele reale : $A = \sqrt{5} + \sqrt{11}$ și $B = \sqrt{3} + \sqrt{13}$. Fără a extrage rădăcina pătrată, să se decidă care este mai mare.

x x x — G.M. nr. 3/1977

R : $A > B$

30. Să se determine numerele de forma $\overline{abc00}$ astfel încît, extrăgînd rădăcina pătrată întreagă, să obținem restul $\overline{abc}$.

Tudor Băețică — G.M. nr. 4/1983

R : $89\,600 = 198^2 + 396$; $89\,100 = 297^2 + 891$

31. Fără a efectua împărțirea, să se afle resturile r_1, r_2, r_3 ale împărțirii numărului 865 782 prin numerele 8, 5 și 9 și să se determine mulțimea $M = \{r_1, r_2, r_3, x\}$ știind că x verifică egalitatea :

$$\frac{26 + \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{0{,}0025 \cdot \frac{28}{63} \cdot 10^2} \cdot \frac{3 \cdot 7 + \sqrt{16} + 2}{1 + \sqrt{4 \cdot 9}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{27} \cdot \frac{3}{8}}}} = \frac{80 \cdot x}{a}$$

unde a este determinat de condiția : $\overline{7a628}$ se divide cu 9.

Adriana Truică — G.M. nr. 12/1978

R : $r_1 = 1$; $r_2 = 2$; $r_3 = 4$; $a = 4$. Determinați pe x.

32. Să se arate că numărul :

$$N = \frac{(5 + 15)^2 + \sqrt{\frac{3}{2^2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} \cdot a^2 - \sqrt{160\,000}}}{(10 + 3) \cdot 2 - \sqrt{625}} + a$$

nu poate fi pătrat perfect oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ și $a \neq 0$.

Radu Corina — E : 7892

R : $N = a^2 + a = a(a + 1)$ care nu poate fi pătrat perfect fiind produsul a două numere naturale consecutive.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al VI-lea

INEGALITĂȚI. COMPARAREA NUMERELOR RAȚIONALE. INEGALITĂȚI NUMERICE

1. Să se arate că numerele $A = 1977^2 - 1877^2$ și $B = 2(1\,977 + 1\,976 + \ldots + 1\,878) - 100$ sînt egale.

V. Chiriac — G.M. nr. 5/1977

Soluție: $A = (1\,977 - 1\,877)(1\,977 + 1\,877) = 385\,400$ și $B = 2 \cdot \frac{(1\,977 + 1\,878) \cdot 100}{2} - 100 = 385\,400$, deci $A = B$.

2. Comparați numerele $A = a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^{1980}$ și $B = (a^{990})^{1981}$.

N. Ivășchescu — G.M. nr. 11/1981

R: $A = B$. Se aplică formula sumei $1 + 2 + \ldots + 1\,980 = \frac{(1 + 1\,980) \cdot 1\,980}{2}$

3. Care număr este mai mare: 37^{150} sau 215^{100}?

Costică Negoiță — G.M. nr. 11—12/1987

Soluție: Numerele se pot scrie astfel:

$37^{150} = 37^{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = (37^3)^{50} = (50\,653)^{50}$; $215^{100} = 215^{4 \cdot 25} = (215^2)^{50} = (46\,225)^{50}$ Deci, primul număr este mai mare.

4. Care din următoarele numere este mai mare?
a) 3^{236} și 2^{354}; b) 5^{236} și 3^{354}.

Scanned with OKEN Scanner

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției :
„2^{354} este mai mic decît 81^{236} sau 5^{235} este mai mare decît 3^{354}."

C. Dragomir — G.M. nr. 4—5/1984

Soluție : Numerele se scriu succesiv astfel :

$81^{236} = 3^{4 \cdot 59} = (3^4)^{59} = 81^{59}$; $2^{354} = 2^{6 \cdot 59} = (2^6)^{59} = 64^{59}$, deci $81^{236} > 2^{354}$. Analog se obține $5^{236} < 81^{354}$. Propoziția e adevărată.

5. Care din numerele : a) 11^{1979} și 37^{1320}; b) 13^{1982} și 47^{1320} este mai mare?

Claudiu Obrea — G.M. nr. 12/1982

Soluție : a) $11^{1979} < 11^{1980} = 11^{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11} = (11^3)^{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} =$

$= (1\,331)^{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$

$37^{1320} = 37^{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = (37^2)^{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = (1\,369)^{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$.

Rezultă că $11^{1979} < 37^{1320}$

b) $13^{1982} < 13^{5940} = 13^{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11} + (13^3)^{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} =$

$= (2\,197)^{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$

$47^{1320} = 47^{3^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = (47^2)^{3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = (2\,209)^{3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$

Rezultă că $13^{1984} < 47^{1320}$

6. Să se stabilească care număr este mai mare : $a = 2^{65}$ sau $b = 5^{28} - 125^7$.

C. Vîrvoreanu — G.M. nr. 8/1981

Soluție : $a = 2^2 \cdot 2^{3 \cdot 21} = 4 \cdot 8^{21}$

$b = 5^{22} - 5^{21} = 5^{21}(5 - 1) = 4 \cdot 5^{21}$

$a = 4 \cdot 8^{21} > 4 \cdot 5^{21} = b$, deci $a > b$

7. Care număr este mai mare : $a = 5^{51}$ sau $b = 2^{121} - 2^{120} - 2^{119}$?

Mihaela Banyai — G.M. nr. 12/1982

R : $b > a$. Vezi problema nr. 6!

8. Să se compare numerele : $a = 3^{201}$ și $b = 2^{337} - 2^{336} - 2^{335}$

Tudorică Cîrneanu — G.M. nr. 6/1984

R : $b > a$. Vezi problema nr. 6 !

9. Să se compare numerele $n_1 = 1\,981^{1980} + 1981^{1983}$ și $n_2 = 1\,981^{1981} + 1981^{1982}$

Valentin Vasile

R : $n_1 > n_2$

10. Să se compare numerele $a = 3^{183}$ și $b = 2^{307} - 2^{306} - 2^{305}$.

Maria Băcănoiu — G.M. nr. 4/1987

R : $b > a$

11. Să se afle a, care verifică simultan :

1) $\frac{1}{9} < \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{18} < \frac{2}{a-1} \leq \frac{2}{5}$; 3) $\frac{2}{11} < \frac{3}{3a-5} < \frac{1}{3}$

St. Tifui — G.M. nr. 9/1987

Soluție : a) Inecuația dublă se mai scrie $9 > a > 2$, deci, $a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Analog 2) $a \in \{6, 7, 8, \ldots, 13\}$ și 3) $a \in \{5, 6, 7\}$ Intersecția mulțimilor va fi $a \in \{6, 7\}$.

12. Se consideră numerele :

$a = 2^{718}$ și $b = (5^{200} - 4 \cdot 5^{199} + 9^{54} : 3^{107} - 5^{199})^{479}$.

Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor :
$p_1 : a = b$; $p_2 : a < b$; $p_3 : a > b$

Viorel Adrian Tănasă — G.M. nr. 2—3/1982

R : p_2 este adevărată

13. Scrieți în ordine crescătoare numerele :

2^{585}; 3^{351}; 4^{117}; 3^{234}; $15\,626^{37}$

Flori:a Sacota — G.M. nr. 9/1981

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: $2^{585} = (2^5)^{117} = 32^{117}$

$3^{351} = (3^3)^{117} = 27^{117}$

$4^{117} = 4^{117}$.

$3^{234} = (3^2)^{117} = 9^{117}$

Deci primele 4 numere stau în relația

$4^{117} < 9^{117} < 27^{117} < 32^{117}$ sau $4^{117} < 3^{234} < 3^{351} < 2^{585}$ (1)

Dar 15 $626^{37} > 6\,569^{37} = (9^4)^{37} = 9^{148} > 9^{117} = 3^{234}$ și

15 $626^{37} < 19\,683^{37} = (27^3)^{37} = 27^{111} < 27^{117} = 3^{351}$,

Deci, $3^{234} < 15\,626^{37} < 3^{351}$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă :

$4^{117} < 3^{234} < 15\,626^{37} < 3^{351} < 2^{585}$

14. Să se afle care din numerele $\sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$ și $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$ este mai mare. Generalizare.

Patrik Popescu — Pompu — G.M. nr. 2/1987

Soluție: Vom demonstra cazul general, adică dacă $0 \leq a < b$ și $k > 0$, avem $\sqrt{\sqrt{a+k} - \sqrt{a}} > \sqrt{\sqrt{b+k} - \sqrt{b}}$;

dacă $a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (1) și $\sqrt{a+k} < \sqrt{b+k}$ (2), $k > 0$.

Adunînd (1) și (2), avem : $\sqrt{a+k} + \sqrt{a} < \sqrt{b+k} + \sqrt{b}$

sau $\frac{k}{\sqrt{a+k} + \sqrt{a}} > \frac{k}{\sqrt{b+k} + \sqrt{b}}$. Raționalizînd, obținem :

$\frac{k(\sqrt{a+k} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a+k})^2 - (\sqrt{a})^2} > \frac{k(\sqrt{b+k} - \sqrt{b}}{(\sqrt{b+k})^2 - (\sqrt{b})^2}$ sau $\sqrt{a+k} - \sqrt{a} >$

$> \sqrt{b+k} - \sqrt{b}$ sau $\sqrt{\sqrt{a+k} - \sqrt{a}} > \sqrt{\sqrt{b+k} - \sqrt{b}}$

Caz particular : $a = 11$, $b = 17$, $k = 2$, avem :

$$\sqrt{\sqrt{11+2} - \sqrt{11}} > \sqrt{\sqrt{17+2} \sqrt{17}} \text{ sau } \sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{11}} > \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$$

15. Fără a efectua operațiile de înmulțire, să se stabilească ordinea crescătoare a numerelor :

Scanned with OKEN Scanner

$$a = 189\ 589\ 622 \times 987\ 629\ 575$$
$$b = 189\ 589\ 623 \times 987\ 629\ 574$$
$$c = 189\ 589\ 621 \times 987\ 629\ 576$$

D. Arcanu — G.M. nr. 8/1977

Soluție: Notînd $x = 189\ 589\ 621$ și $y = 987\ 629\ 574$, atunci $a = (x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$
$b = (x + 2)\ y = xy + 2y = xy + y + y$
$c = x(y + 2) = xy + 2x = xy + x + x$
Cum $x < y$, rezultă $b > a > c$.

16. Să se arate că $\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} < 4$

Leon Dinculescu — G.M. nr. 1/1985

R: Se ridică la pătrat și se majorează, unul din termeni.

17. Aflați, fără a extrage rădăcină pătrată, valoarea logică a propoziției:

$$p: \sqrt{17 - \sqrt{145}} + \sqrt{17 + \sqrt{145}} - \sqrt{10} > 0$$

Maria Chiriac — G.M. nr. 7/1983

Soluție: $\sqrt{17 - \sqrt{145}} + \sqrt{17 + \sqrt{145}} > \sqrt{10}$. Se ridică la pătrat și va rezulta că p este adevărată.

18. Să se determine perechile de numere naturale (a, b) cu $a > b > 0$ pentru care este verificată relația $a^2 - b^2 < 10$.

M. Costeniuc — G.M. nr. 1/1984

R: (2, 1); (3, 1); ...

19. Să se arate că:

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{40} + \sqrt{125} < \sqrt{10} + \sqrt{90} + \sqrt{128} < \sqrt{129} + \sqrt{160}$$

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 9—10/1982

R: Se consideră pe rînd fiecare inegalitate și, prin ridicări la pătrat (fiind numere pozitive), se verifică inegalitățile.

Scanned with OKEN Scanner

20. Arătați că:

$$\sqrt{1\,983} + \sqrt{1\,984} + \sqrt{1\,986} + \sqrt{1\,987} < 4\sqrt{1\,985}.$$

D. Marinescu — G.M. nr. 5/1985

Soluție: Notăm $1\,985 = a$, atunci egalitatea devine $\sqrt{a-2} + \sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} < 4\sqrt{a}$. Vom arăta că $\sqrt{a-2} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a}$ și $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}$ prin ridicări la pătrat. Apoi, prin adunare, rezultă, inegalitatea din problemă.

21. Arătați că a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < 1$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < 2$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < 3$

Ionel Atanasiu — G.M. nr. 9/1977

Soluție:

a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$

$$= \frac{5}{6} < 1$$

Analog pentru b) și c).

22. Folosind faptul că dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$, să se arate că $\frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \ldots + \frac{1}{1\,000} > \frac{13}{20}$

Ionel Atanasiu — G.M. nr. 2—3/1982

Scanned with OKEN Scanner

Soluție : Deoarece $a > 0$ și $a \neq b$, rezultă $(a - b) \geq 0$ sau $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ sau $a^2 + ab + b^2 + ab > 4ab$ sau $b(a + b) + a(a + b) \geq 4ab$ sau $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$.

Aplicînd această inegalitate în inegalitatea numerică, obținem :

$$\frac{1}{501} + \frac{1}{1\,000} \geq \frac{4}{1\,501}$$

$$\frac{1}{502} + \frac{1}{999} \geq \frac{4}{1\,501}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{750} + \frac{1}{751} > \frac{4}{1\,501}$$

Adunînd membru cu membru, obținem :

$$\frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \ldots + \frac{1}{1\,000} > \frac{18}{20}$$

23. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Atunci are loc inegalitatea $n^2(n^{n-2} - 1) \geq 9\left(3^{n-2} - 1\right)$.

x x x — G.M. nr. 11—12/1986

Soluție : Din $n \geq 3$ rezultă $n^{n-2} \geq 3^{n-2}$ sau $n^{n-2} - 1 \geq 3^{n-2} - 1$ și $n^2 \geq 9$. Înmulțind cele două inegalități, obținem : $n^2(n^{n-2} - 1) \geq 9(3^{n-2} - 1)$ sau $n^2(n^{n-2} - 1) \geq 9\left(3^{n-2} - 1\right)$.

24. Să se arate, fără a efectua adunarea, că :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 5} < 2$$

I. Albescu — G.M. nr. 8/1978

25. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right).$$

Pe baza acestui rezultat să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$ și să se arate că această sumă este mai mică decît $\frac{1}{3}$, oricare ar fi $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

x x x — G.M. nr. 9/1987

26. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \ldots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Aurel T. Herțeg — G.M. nr. 7/1977

Soluție: Dacă $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, rezultă $(a-b)^2 > 0$ sau $a + b - 2\sqrt{ab} > 0$, atunci $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{1}{2}$.

Dacă înlocuim $b = k+1$ și $a = k$, inecuația devine: $\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1} < \frac{1}{2}$. Însumînd pentru k de la 1 la n, obținem $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1} < \frac{n}{2}$ c.c.t.d.

27. Să se arate că $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1+2^n}{1+3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

I. Safta — G.M. nr. 7/1985

Soluție: Din $2 < 3$ rezultă $2^n < 3^n$ sau $2^n \cdot 3^n + 2^n < 2^n \cdot 3^n + 3^n$ sau $2^n(3^n+1) < 3^n(2^n+1)$ sau $\frac{2^n}{3^n} < \frac{1+2^n}{1+3^n}$ sau

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1+2^n}{1+3^n} \qquad (1)$$

Din $2 < 3$, rezultă $\frac{1}{2^{n-1}} + 2 < \frac{1}{3^{n-1}} + 3$, sau $\frac{1+2^n}{2^{n-1}} < \frac{1+3^n}{3^{n-1}}$

sau $\frac{1+2^n}{1+3^n} < \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}$ sau $\frac{1+2^n}{1+3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă dubla inegalitate.

28. Fie x, y, z trei numere naturale. Să se arate că:

1) $\left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z}\right) \cdot 2^{x+y+z} = 2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x}$

Se vor da două metode.

2) $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} \geq 3$. În ce caz avem egalitatea?

3) $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 3$, atunci $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 4$.

Aurel Ene — G.M. nr. 10/1985

Soluție: 1) Prima metodă — se aduce la același numitor $\frac{(2^y \cdot 2^z + 2^x \cdot 2^z + 2^x \cdot 2^y)}{2^x \cdot 2^y \cdot 2^z} \cdot 2^{x+y+z} = 2^{x+y} + 2^{y+z} +$

$+ 2^{x+z}$ sau $\frac{(2^{y+z} + 2^{x+z} + 2^{x+y})}{2^{x+y+z}} \cdot 2^{x+y+z} = 2^{x+y} + 2^{y+z} +$

$+ 2^{x+z}$.

A doua metodă — se desface paranteza!

2) Egalitatea are loc cînd $x = y = z = 0$.

3) $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+y} > 3$ pentru $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 1$.

Atunci și

$2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 4$, deci implicația este adevărată.

Capitolul al VII-lea

OPERAȚII ÎN BAZE DIFERITE

În capitolul I am folosit scrierea sistematică a unui număr în baza 10. De exemplu : $\overline{5\,475} = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. Scrierea sistematică a unui număr oarecare în baza B folosește B semne și anume : 0, 1, 2, ... , (B—1). De exemplu : $4\,657_{(8)}$ este un număr scris în baza 8 care este indicat prin cifra 8 din paranteză. Se citește : „patru șase cinci șapte în baza 8" și nu „patru mii șase sute cinci zeci și șapte în baza 8".

Scrierea sistematică în baza 8 va fi :

$$4657_{(8)} = 4 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7.$$

În sistem binar (baza 2), scrierea sistematică va fi : $11101 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$.

Deci, un număr într-o bază oarecare se scrie sistematic astfel : prima cifră din stînga numărului înmulțită cu baza care figurează la un exponent egal cu numărul cifrelor care urmează plus a doua cifră înmulțită cu baza la exponent egal cu numărul cifrelor care urmează ș.a.m.d.

Așadar, scrierea sistematică într-o bază oarecare B va fi :

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}_{(B)} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B + a_0.$$

Efectuînd calculele cu puteri, înmulțirile și adunările, se obține numărul transformat în 10. Pentru numerele scrise în baza 10 nu se indică baza.

Trecerea unui număr din baza 10 într-o bază oarecare B se face astfel : se împarte numărul la B, apoi primul cît se împarte din nou la B ș.a.m.d. pînă ce ultimul cît este mai mic decît B. Numărul în baza B este format din toate resturile scrise în ordine inversă decît efectuarea împărțirilor.

De exemplu : $1793 = x_{(8)}$

$$\begin{array}{r|l} 1793 & 6 \\ \hline =59 & 298 \\ =58 & 58 \\ \hline =5 & =4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & \\ \hline 49 & \\ =1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & \\ \hline 8 & 6 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

Deci, numărul căutat este $12145_{(6)} = 12145_{(6)}$.

Reprezentarea fracțiilor sistemice cu ajutorul bazei 8: Exemplu:

$$128{,}452_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 8 + \frac{4}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{2}{8^3}$$

În general, avem: $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k{}_{(B)} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B + a_0 + \frac{b_1}{B} + \frac{b_2}{B^2} + \frac{b_3}{B^3} + \ldots + \frac{b_k}{B^k}$.

1. Să se arate că numărul: $n = \frac{401\hat{3}_6 + 1\hat{3}\hat{3}\hat{3}_4}{100_5} - 111_2$ este un pătrat perfect în sistemul zecimal.

Radu Nicolae — G.M. nr. 11/1979

Soluție: Transformăm toate numerele în baza 10:

$401\hat{3}_6 = 4 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6 + \hat{3} = 87\hat{3}$

$1\hat{3}\hat{3}\hat{3}_4 = 1 \cdot 4^3 + \hat{3} \cdot 4^2 + \hat{3} \cdot 4 = 127$

$100_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 + 0 = 25$

$111_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 15$, atunci n se scrie astfel:

$n = \frac{87\hat{3} + 127}{25} - 15 = 40 - 15 = 25 = 5^2$

2. Se dau numerele: $x_1 = \sqrt{12\hat{3}_4} + \sqrt{1042_5} - \sqrt{300_4}$ și $x_2 = \sqrt{10_2} + \sqrt{2\hat{3}\hat{3}_3} - \sqrt{135}$, unde indicii sînt baze de numerație. Să se stabilească care din cele două numere este mai mare.

Marius Constantin — G.M. nr. 6/1985

Soluție :

$x_1 = \sqrt{27} + \sqrt{147} - \sqrt{108} = 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{192} - \sqrt{75} = \sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$, deci $x_1 = x_2$

3. Se dau numerele $A = \sqrt{10_2} + \sqrt{120_3}$; $B = \sqrt{50_6} - 1$; $C = \sqrt{12_4} + \sqrt{10_5}$.

a) Fără a folosi extragerea rădăcinii pătrate, să se aşeze numerele în ordine crescătoare.

b) Să se arate că :

$$[A \cdot C(B^2 - 18) - 13_7 \cdot \sqrt{11_2}] : (13_7 \sqrt{12_8} + \sqrt{11_2}) = 1$$

I. Zaharia — G.M. nr. 11/1977

R : a) $B < A < C$

4. Să se găsească toate numerele din sistemul zecimal care se scriu în sistemul binar cu două cifre, cu trei cifre, cu patru cifre.

N. Ivăşchescu — G.M. nr. 7/1978

Soluție : $\overline{ab}_2 = 2 \cdot a + b$, unde $a = \{1\}$; $b = \{0, 1\}$. Atunci numerele vor fi : 2 și 3.

$\overline{abc}_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$, unde $a = \{1\}$; $b = \{0, 1\}$; $c = \{0, 1\}$. Atunci numerele vor fi : 4, 5, 6, 7.

$\overline{abcd}_2 = 8a + 4b + 2c + d$, unde $a = \{1\}$; $b = \{0, 1\}$; $c = \{0, 1\}$; $d = \{0, 1\}$. Atunci numerele vor fi : 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

5. Se consideră numerele $N_1 = \underbrace{\overline{aaa \ldots a}}_{8n \text{ cifre}}$ și $N_2 = \underbrace{\overline{aaa \ldots a}}_{n \text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine cîtul împărțirii $N_1 : N_2$.

b) Utilizînd rezultatul obținut, să se afle cîtul împărțirii $555555555_7 : 555_7$.

Ioan Brezeanu — G.M. nr. 6/1982

Scanned with OKEN Scanner

Soluție i

a) $N_2 = a(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1)$

$N_1 = a(b^{3n-1} + b^{3n-2} + \dots + b^{2n} + b^{2n-1} + b^{2n-2} + \dots + b^n + b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1) = ab^{2n}(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1) + ab^n(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1) + a(b^{n-1} + \dots + 1) = a(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1)(b^{2n} + b^n + 1)$, atunci $N_1 : N_2 = b^{2n} + b^n + 1 = \underbrace{100\dots00}_{n \text{ cifre}}\underbrace{100\dots01}_{n \text{ cifre}}$,

b) $555555555_x : 555_7 = 1001001_7$

6. Media aritmetică a numerelor 752_8; 1022_3; 842_9; x_{10} este 2354_6. Să se afle x_8, știind că indicii arată bazele de numerație în care sînt scrise numerele respective.

Petre Bârleanu — G.M. nr. 2/1981

R : 1485_9

7. 1) Să se calculeze numerele a și b în bazele respective:

$a = 1182_4 : \{88100_4 - 888_4 \cdot [1210220_4 : (2288_4 + 108_4 \cdot 88_4)] + 88_4\}$

$b = (84_5 \cdot 24_5 - 82843_5 : 84_5 - 1040_5)^2$

2) Să se exprime în baza 10 : $a^2 + b^2$; $(a + b)^2$, unde numerele a și b sînt numerele naturale de la punctul 1).

Corina și Doina Gruia — G.M. nr. 7/1980

8. Se dau numerele a și b în bazele respective :

$a = 282_8 + [8282_6 - 248_8 + 2936_{12} \cdot (2481_8 - 12_4) + 241_9]$;

$b = 284_8 + 482_9 + [8248_9 + 128_6 \cdot (2486_{12} + 439_{16})]$

Se cere :

1) Să se calculeze numerele a și b în baza 10.

2) Să se calculeze $a^2 - b$ în baza 9.

Denisa Simiona Paris — G.M. nr. 1/1988

9. Se dau a = 101, b = 111 două numere în baza 2. Să se verifice formula $a^2 + 10ab + b^2 = (a + b)^2$, efectuînd calculele fără a schimba baza.

C.T. Nedelcu — G.M. nr. 4/1982

10. Să se afle valorile $\frac{b}{a}$ și $\sqrt{ab}$ dacă :

$a = \left[(13_5)^2\right]^3 \cdot \frac{1}{2048}$; $b = \left[(10_2)^2\right]^2$: $16 \cdot (\sqrt{64} + 64)$ unde indicii sînt bazele de numerație în care sînt scrise numerele.

Lavinia Ferche — G.M. nr. 2—3/1982

11. Să se arate că :

$128_4 - 234_5 + 345_6 - 456_7 + 567_8 + 678_9 - 789_{10} = 1$, indicii fiind bazele de numerație respective.

Gh. Gîdea — G.M. nr. 4/1975

12. Să se arate că :

$1212_3 + 1313_4 + 1414_5 + 1515_6 + 1616_7 = 2000002_8$.

Indicii indică bazele de numerație respective.

P. Gherman, Seleuș-Daneș — G.M. nr. 1/1976

13. Să se verifice egalitățile :

$$4422_6 - 2244_6 = 5588_6 - 3355_6$$
$$4422_7 - 2244_7 = 5588_7 - 3355_7$$

apoi să se arate în ce sistem de numerație mai au loc. Indicii indică bazele de numerație.

Petru Gherman, Seleuș — G.M. nr. 9—10/1982

Soluție : $4422_x - 2244_x = 5588_x - 3355_x$, sau
$4x^3 + 4x^2 + 2x + 2 - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 4 =$
$= 5x^3 + 5x^2 + 8x + 8 - 3x^3 - 3x^2 - 5x - 5$ sau
$2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$. Această egalitate, fiind o identitate, are loc în orice sistem de numerație $x \geq 6$.

14. Să se afle două numere naturale, scrise în baza 10, care îndeplinesc condițiile :

1) suma lor, scrisă în baza 3, este 2020_3;
2) diferența lor, în baza 10, este 66.

Georgiana Mirea — G.M. nr. 5/1985

R : $a = 48$; $b = 12$

15. Să se afle x din egalitatea :

$$\sqrt{\frac{(33_5 + 12_6 \cdot 12_7) : 12_7 - 1}{10_2 + \sqrt{132_4 \cdot 13_4 - 110_2 \cdot 101_2 + 121_3}}} = \frac{x\left[\sqrt{(21_7)^2 - (101_2)^2 \cdot 22_3 - \frac{1200_3}{101_3}}\right]}{100_9 - 117_8}$$

Petre M. Neculai — G.M. nr. 11/1977

R ĩ $x = 8$

16. Să se determine numărul x din egalitatea ĩ

$$\sqrt{\frac{1 + 100_2 + 100_3 + 28_4}{441_5 - 88_6}} + \frac{x}{8} = \sqrt{\frac{42214_5 - 80100_4}{8{,}1 \tilde{:} 0{,}9}} + \sqrt{111101_3}$$

Ion Fițigău — G.M. nr. 10/1977

R ĩ Se ajunge la $\frac{5}{10} + \frac{x}{8} = \frac{45}{8} + 19$ sau $x = \frac{201}{2}$

17. Să se afle x din egalitatea ĩ

$$\frac{\frac{1_8}{112_3}\sqrt{\frac{1241_5}{1000_8}} + \sqrt{\frac{1225_{10}}{50_7}} - \frac{14_9}{1101_2}}{(\sqrt{30020010_4} + 8_7) \cdot \frac{8675_8 - 8674_8}{8674^8 + 101100_2}} = x_{10} - 1812_6$$

Romeo Zamfir — G.M. nr. 10/1981

18. Se dă numărul natural $a = \overline{8(11)(12)4_{13}}$. Scrieți acest număr în baza 5.

Constantin Coandă — G.M. nr. 7/1983

Soluție : $a = 8 \cdot 13^3 + 11 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13 + 4 = 8\,610_1 = 233420_5$.

19. Să se arate că în orice sistem de numerație cu baza mai mare sau egală cu 7, numărul $N = 121 + 2\,662 + 14\,641$ este pătrat perfect.

Marius Dicu — G.M. nr. 3/1981

Soluție : $N = 121_x + 2662_x + 14641_x = (x^2 + 2x + 1) + (2x^3 + 6x^2 + 6x + 2) + (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) = (x^2 + 3x + 2)^2 = (132_x)^2$

20. Să se înlocuiască steluțele prin cifre corespunzătoare pentru a avea egalitatea : $\overline{1x5_6} = \overline{x0*_5}$.

Soluție : $\overline{1a5_6} = \overline{b0*_5}$ sau $6^2 + 6a + 5 = 5^2b + *$ sau $6a + 38 = 25b$. Dar $25b$ se termină cu 0 sau cu 5.

I. Dacă $25b$ se termină cu 0, atunci $6a$ se termină cu 2

a) deci $a = 2$, $b = 2$, adică $125_6 = 205_5$

b) dacă $a = 7$, atunci nu există b.

II. Dacă $25b$ se termină cu 5, atunci $6a$ se termină cu 7, dar nu există cifra a astfel ca $6a$ să se termine cu 7.

Problema are o singură soluție.

21. Să se determine x astfel încît $\overline{301xx_6} - \overline{xx26_7} = \overline{xx2x_7}$, unde indicii arată bazele sistemului de numerație în care sînt scrise numerele.

Mircea Hușanu — G.M. nr. 10/1980

R : $x = 5$

22. Să se găsească numerele naturale a, b, c diferite între ele și mai mici decît 3, astfel ca să fie adevărată relația : $(aba_3)^2 = \overline{abcba_3}$.

C. Cărbunaru — G.M. nr. 7/1978

R : $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$

23. Să se găsească elementele mulțimii $A = \{a, b,\}$ știind că într-o bază de numerație mai mică decît 6 are loc egalitatea $\overline{abba} - \overline{aaa} = \overline{bbba}$.

Iulian Nicu — G.M. nr. 6/1978

Soluție : Scriind egalitatea în baza x și apoi trecînd în baza 10 se obține relația : $(a - b)(x - 1)(x^2 + x + 1) = a(x^2 + x + 1)$ sau $(a - b)(x - 1) = a$.

Se vor studia cazurile pentru $x \in \{5, 4, 3, 2\}$.

Dacă $x = 5$, rezultă $3a = 4b$, adică $\{4, 3\}$.

Dacă $x = 4$, rezultă $2a = 3b$, adică $\{3, 2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x = 8$, rezultă $a = 2b$, adică (2, 1).
Dacă $x = 2$, imposibil.

24. Să se arate că numărul $\overline{abcd}_5$, unde a, b, c sînt cifre pare și d este impar, nu este pătrat perfect în nici un sistem de numerație.

Tatiana Stănescu — G.M. nr. 6/1978

Soluție: $\overline{abcd}_5 = (a \cdot 5^4 + b \cdot 5^3 + c \cdot 5^2) + (d \cdot 5 + 3)$. Prima sumă se termină în zero, a doua sumă se termină prin 8, deci $\overline{abcd}_5$ se termină prin 8, deci nu poate fi pătrat perfect.

25. În ce bază de numerație împărțirea 4616 : 66 dă cîtul 55 și restul 20?

Paul Snaider — G.M. nr. 8/1984

R: $x = 8$

26. În ce bază de numerație are loc înmulțirea $11 \cdot 121 = 1381$?

R: $x \geq 4$

27. În ce bază de numerație numerele 18 și 81 sînt două puteri consecutive ale lui 2 și care sînt aceste puteri?

Nicolae Radu — G.M. nr. 6/1978

Soluție: $13_x = 2^y$ și $81_x = 2^{y+1}$ sau $x + 3 = 2^y$ și $8x + 1 = 2^y \cdot 2$, de unde $8x + 1 = (x + 8) \cdot 2$, deci $x = 5$ și puterile sînt 2^3 și 2^4.

28. Se dă fracția

$F = \dfrac{24_x}{25_x - 2_x}$, unde x este baza unui sistem de numerație.

Să se arate că F este ireductibilă.

Antoneta Maftei — F.M. nr. 2—3/1982

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: În baza 10, F devine $F = \frac{2x + 4}{2x + 3}$. Dacă fracția se simplifică prin d, rezultă că d/2x + 4 și d/2x + 4 + 8, adică d/(2x + 4 − 2x − 8) sau d/1, deci fracția nu se mai simplifică; deci este ireductibilă.

29. Să se arate că în orice sistem de numerație cu baza x> 3 numerele 21_x; 220_x și 221_x sînt numere pitagorice.

I. Trifon — G.M. nr. 9/1979

30. Să se determine baza de numerație x în care este adevărată egalitatea $(121_x)^2 = 14641_x$.

Mihaela Banyai — G.M. nr. 5/1982

31. Să se găsească baza x a sistemului de numerație pentru care are loc relația

$$\frac{554_x + 62_x + 12}{524_x : 21_x} = 20$$

Ștefan Bînă — G.M. nr. 4/1981

R: x = 8

32. Să se arate că dacă $x \in \{6, 8, 10, 12\}$, atunci $2345_x - 321_x = 3125_x - 1101_x$, unde x este baza de numerație. Verificare.

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 9/1985

R: Se ajunge la identitate.

33. Să se afle bazele de numerație în care sînt scrise numerele din egalitatea următoare, știind că bazele sînt consecutive:

$$11_x + 11_y + 11_z + 11_u + 11_t = 35$$

I. Albescu — G.M. nr. 8/1978

R: x = 4; y = 5; z = 6; u = 7; t = 8

Scanned with OKEN Scanner

34. Dacă $6_x \cdot 7_x = 52_x$, atunci să se scrie numerele 12_x, 144_x, 1750_x, 8674_x în baza 10.

C.D. Mituțoiu — G.M. nr. 12/1980

R: $x = 8$

35. Să se determine valorile lui x și y din egalitățile următoare, știind că ele reprezintă bazele sistemelor de numerație în care au fost scrise numerele:

$$9\sqrt{64_x} = 10_{10}\sqrt{49_y}$$

$$\sqrt{64_x} = \sqrt{49_y} + 1, \quad x \neq y$$

R: $x = 16$; $y = 18$

I. Bogatu — G.M. 1/1981

36. Determinați x din egalitatea

$$\frac{23_x}{11_2} + \frac{\overline{x2}_6}{10_3} = (11_3)^2 - 110_2 + 5$$

unde indicii sînt baze de numerație.

Stela Tomulescu — G.M. nr. 1/1985

R: $x = 5$

37. Să se determine mulțimea $\{a, b, x, y\} \in \mathbb{N}$ din relațiile următoare, știind că indicii reprezintă bazele sistemelor de numerație:

$$11_x + 22_x + 33_x + 44_x + 55_x = \overline{aba}_{10} = 11_y + 22_y + 33_y + 44_y + 55_y + 66_y + 77_y$$

I. Bogatu — G.M. nr. 11/1982

R: $\{2, 5, 11, 8\}$

38. În ce bază de numerație sînt scrise numerele următoare, știind că are loc egalitatea:

$$2_h \cdot 11_h + 4_h \cdot 21_{k+1} + 3_h \cdot 21_{k+2} + \overline{a33}_{k+2} = \overline{1a30}_{k+2}$$

($h > 4$, $k > 1$, $a \in \mathbb{N}^*$). Cît de mare poate fi a?

Toniță Vasile — G.M. nr. 4/1980

R: $k = 2$; $1 \leq a \leq 8$

39. Să se afle numărul natural de forma $\overline{abccba}$ în baza 8 știind că $b - a = c + 1$.

Narcis Oprea — G.M. nr. 11/1985

R: $a = 1, \quad b = 2, c = 0$

40. Să se determine cifra a și baza de numerație astfel ca egalitatea următoare $\overline{1a8} + \overline{8a1} + \overline{81a} + \overline{a18} + \overline{a81} + \overline{18a} = \overline{aaa0}$ să fie adevărată.

Iulian Micu — G.M. nr. 8/1980

R: $a = 2, x = 6$. Mai sînt și alte soluții?

41. Să se determine cifra a astfel încît să avem $\overline{a22a_3} + \overline{a83a_4} = \overline{a70_{10}}$, unde indicii de jos arată bazele sistemului de numerație în care sînt scrise numerele.

Gh. Tutulan — G.M. nr. 1/1980

R: $a = 2$

42. Să se determine x din egalitatea

$$[(x_{10} - 224_5) \cdot 5 - 182_7] \cdot 71_8 + 80_4 = 12_{10}$$

unde indicii reprezintă bazele de numerație în care sînt scrise numerele.

Daniela Ilea — G.M. nr. 11—12/1986

R: $x = 100$

43. Determinați efectiv toate relațiile distincte de forma $\overline{aba}_{b+a} = \overline{bab}_{a+a}$, cu $a \neq b$; $a, b, x \in B = \{1, 2, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

C. Gîdea — G.M. nr. 11—12/1987

R: $x = 8$; $a = 1$; $b = 8$. Găsiți și alte soluții.

44. Să se determine cifrele a, b, c, d, e din egalitatea $\overline{ababbbaba_2} = \overline{cde}$ cu $d < c < e$.

Leon Dinculescu — G.M. nr. 2/1985

R: $a = 1$; $b = 0$; $c = 8$; $d = 2$; $e = 5$; $2 < 3 < 5$

Mai sînt și alte soluții?

Scanned with OKEN Scanner

45. Să se arate că în orice bază mai mare ca 7, numărul 1367631 este cub perfect.

Ion Neață — G.M. nr. 6/1981

R: 111^3 în baza 10. Demonstrați în baza x.

46. Folosind puterile naturale ale lui 2, să se stabilească direct cîte cifre îi corespund numărului 400_{10} scris în sistemul binar.

C. Croitoru — G.M. nr. 5/1981

Soluție: $400 = 256 + 128 + 16 = 2^8 + 2^7 + 2^4 = 110010000_2$.

47. Să se determine numerele naturale de 3 cifre, scrise în baza 10, știind că în baza 9 se scriu $\overline{aba}$, iar în baza 13 se scriu $\overline{bab}$.

Daniel Cojocaru — G.M. nr. 11/1984

Soluție: Din condiția $\overline{aba}_9 = \overline{bab}_{13}$ se ajunge la $3a = 7b$ deci $a = 7$ și $b = 3$; $\overline{aba}_9 = 737_9 = 601$

48. Să se găsească elementele mulțimii $A = \{a, b, c\}$ știind că într-o bază de numerație mai mică decît 6 are loc egalitatea $\overline{bca} + \overline{cab} + \overline{abc} = \overline{abba}$, unde $0 < a < b < c$.

Iulian Micu — G.M. nr. 2/1979

R: $A = \{1, 2, 3\}$

49. Găsiți o condiție necesară și suficientă pentru ca numerele de forma $\overline{abc}$ să fie divizibile cu numerele de forma $\overline{ac}$, oricare ar fi baza sistemului de numerație în care sînt scrise numerele.

Florian Sacota — G.M. nr. 2/1983

Soluție: Să considerăm numerele într-o bază oarecare notată cu p. Atunci avem

$$\frac{\overline{abc}_p}{\overline{ac}_p} = \frac{ap^2 + bp + c}{ap + c} = \frac{(ap + c) + [ap(p-1) + bp]}{ap + c} =$$

$$= 1 + \frac{p[a(p-1) + b]}{ap + c}.$$ Numerele de forma $\overline{abc}_p$ sînt divi-

zibile cu numerele de forma $\overline{ac}$, dacă și numai dacă $a(p-1)+b=M(ap+c)$.

50. Dacă a, b, c și m sînt numere naturale ($a \neq 0$) și $m > \max\{2a, 2b, 2c\}$, atunci numărul $A = \overline{(2\cdot a)(2\cdot b)(2\cdot c)abc}_m$ sînt divizibile cu $\overline{abc}_m$ și cu 2001 $_m$.

Tudor Dragonu — G.M. nr. 5/1981

Soluție: Scriind numărul A în baza 10, obținem $A = \overline{(2\cdot a)(2\cdot b)(2\cdot c)abc}_m = 2\cdot a\cdot m^5 + 2\cdot b\cdot m^4 + 2\cdot c\cdot m^3 + am^2 + bm + c = am^2(2m^3+1) + bm(2m^3+1) + c(2m^3+1) = (2m^3+1)(am^2+bm+c) = 2001_m \cdot \overline{abc}_m$. Deci A se divide prin $\overline{abc}_m$ și prin 2001 $_m$.

51. a) Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $x > 3$, numărul $N_1 = 1320_x$ este divizibil cu 6.

b) Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $y > 1$, numărul $N_2 = 10101$, este impar și neprim.

Să se generalizeze.

Liliana Niculescu — G.M. nr. 5/1979

Soluție: a) $N_1 = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$
Produsul a 3 numere naturale consecutive este divizibil prin 6.

b) $N_2 = y^4 + y^2 + 1 = (y^2 - y + 1)(y^2 + 1 + 1)$, deci N_2 este număr neprim deoarece este produs de doi factori.

De asemenea $N_2 = [y(y-1)+1][y(y+1)+1]$

Cum $y(y-1)$ este număr par, rezultă că $y(y-1)+1$ este impar.

Cum $y(y+1)$ este număr par, rezultă că $y(y+1)+1$ este impar.

Produsul a două numere impare este un număr impar.

52. Fie numărul $A = \overline{\underbrace{111\ldots}_{n\text{ cifre}}\underbrace{1666\ldots}_{n\text{ cifre}}\underbrace{6555\ldots}_{n\text{ cifre}}5}$ într-o bază de numerație $b > 6$.

1) Să se arate că A se divide cu $(b^n+1)(b^n+5)$.
2) Să se afle toate valorile pe care le poate lua expresia

$E_{(B)} = 1976(-1)^B + 1977(-1)^{B+1}$, unde B este cîtul diviziunii lui A cu $(b^n + 1)(b^n + 5)$.

Florentina și Emanoil Grama — G.M. nr. 8/1980

Soluție: 1) $A = \overline{111\ldots1666\ldots6555\ldots5}_{,} = \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}} \cdot$

$\cdot b^{2n} + \underbrace{666\ldots6}_{n\text{ cifre}} \cdot b^n + \underbrace{555\ldots5}_{n\text{ cifre}} = \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}} \cdot b^{2n} - \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}} +$

$+ \underbrace{666\ldots6}_{n\text{ cifre}} \cdot b^n + \underbrace{666\ldots6}_{n\text{ cifre}} = \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}} \cdot (b^{2n} - 1) + \underbrace{666\ldots6}_{n\text{ cifre}} \cdot$

$\cdot (b^n + 1) = \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}}(b^n + 1)(b^n - 1) + \underbrace{666\ldots6}_{n\text{ cifre}}(b^n + 1) =$

$= (b^n + 1)(b^n + 5) \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}}$

Atunci $B = \dfrac{A}{(b^n + 1)(b^n + 5)} = \underbrace{111\ldots1}_{n\text{ cifre}}$, deci B este un număr impar.

2) $E(B) = 1976(-1)^B + 1977(-1)^{B+1} = -1976 + 1977 = 1$, deci $E(B) = 1$.

53. Să se stabilească în ce baze de numerație criteriul de divizibilitate cu 2 rămîne în formularea cunoscută pentru numerele scrise în baza 10. Aceeași chestiune pentru criteriul de divizibilitate cu 3.

x x x — G.M. nr. 8/1978

Soluție: Un număr scris într-o bază oarecare este divizibil cu 2 dacă și numai dacă ultima cifră este număr par, iar baza este un număr par mai mare decît ultima cifră.

Pentru criteriul cu 3 vom considera un număr cu mai multe cifre. De exemplu $n = \overline{abcde}_{,}$.

Considerăm baza $4 = 3 + 1$. Atunci n se va scrie astfel: $n = \overline{abcde}_4 = a(3+1)^4 + b(3+1)^3 + c(3+1)^2 + d(3+1) +$
$+ e = a(M3 + 1) + b(M3 + 1) + c(M3 + 1) + d(M3 + 1) +$
$+ e = M3 + (a + b + c + d + e)$.

Numărul n se divide cu 6 dacă şi numai dacă suma cifrelor adunate ca simple unităţi va fi un număr divizibil cu 3.

Acelaşi criteriu va rămîne valabil pentru bazele $7 = M3 + 1$ ş.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al VIII - lea

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

Există două căi principale în rezolvarea problemelor:

1) prin algebră, adică punînd problema în ecuație, sau în sistem și rezolvînd ecuația sau sistemul;

2) prin raționament aritmetic.

Vom lua ca exemplu o problemă pe care o vom rezolva prin ambele metode, pentru a ne da seama mai bine prin ce se caracterizează fiecare din ele și de ce le folosim în învățămînt pe ambele.

Problemă: Un țăran are de 7 ori mai multe găini decît rațe. Vinde 15 găini și cumpără 8 rațe. Atunci numărul găinilor devine de 4 ori mai mare decît al rațelor.

Cîte găini și cîte rațe a avut la început?

Rezolvarea algebrică

Fixarea necunoscutei sau a necunoscutelor.

Notăm cu x numărul rațelor. Atunci numărul găinilor va fi 7x. Dacă se vînd 15 găini, atunci numărul lor va fi $7x - 15$ și dacă se cumpără 8 rațe numărul lor va fi $x + 8$.

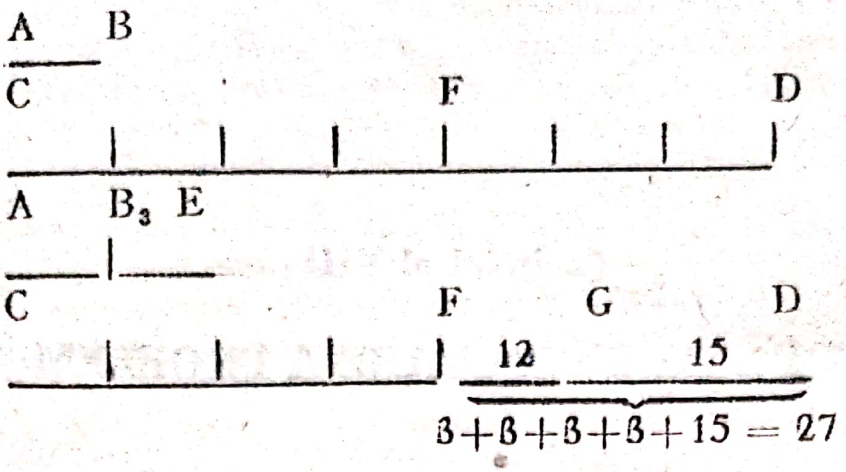
Afirmația că numărul găinilor devine de 4 ori mai mare decît al rațelor se scrie $7x - 15 = 4(x + 8)$ sau $x = 9$.

Deci, țăranul avea la început 9 rațe și 63 găini.

Rezolvarea aritmetică

Vom compara numărul găinilor cu al rațelor figurînd prin segmente cele două situații în modul următor:

Scanned with OKEN Scanner



După ce se cumpără cele 3 rațe și se vînd 15 găini, rezultă că segmentul CG = 4AE, deci, FG = 12 și GD = 15, adică GD reprezintă cele 15 găini vîndute. Deci FD = 27, ceea ce reprezintă cele 3 părți la fel de mari din prima situație. Atunci, segmentul AB reprezintă 9, iar segmentul CD = 63. La început, țăranul a avut 9 rațe și 63 găini.

Comparație

1) În algebră lucrăm cu numere, în aritmetică raționăm direct asupra mărimilor date în problemă.

2) Ecuația (se putea lucra și cu sistem de două ecuații cu două necunoscute) traduce pe scurt esența matematică a problemei (dată prin cuvinte) în limbaj matematic, concis și esențial, a ecuațiilor (sau a sistemelor).

În raționamentul aritmetic urmărim și avem prezente condițiile problemei; pentru aceasta ne ajutăm de o figură geometrică și de notarea în scris a datelor problemei.

3) Rezolvarea ecuației (sau a sistemului) se face prin metodele învățate anterior și uităm condițiile concrete ale problemei.

În aritmetică nu avem o metodă unitară de rezolvare; gîndirea noastră trebuie să rămînă mereu activă și mereu atentă la condițiile problemei, la modul cum aceste condiții se transformă în cursul raționamentului. Aici, trebuie să descoperim prin gîndire personală ținînd seama de condițiile concrete ale problemei date, calea de rezolvare.

4) Rezolvarea algebrică este mai simplă, mai unitară, folosind o metodă mai generală, face că ea este de preferat din punct de vedere științific și chiar de către elevii care știu să rezolve ecuații și sisteme.

Calea aritmetică, tocmai datorită specificului ei, faptul că se bazează mai mult pe inițiativă și gîndire personală, se folo-

Scanned with OKEN Scanner

seşte în învăţămînt în scop educativ, pentru a dezvolta puterea de judecată, pentru a învăţa pe elevi să gîndească direct asupra realităţii. Ea este totodată o pregătire pentru metoda algebrică căci punerea problemei în ecuaţie — cheia rezolvării prin algebră — este un proces întrucîtva asemănător cu raţionamentul aritmetic.

Aşadar, în aritmetică nu există o metodă unică generală, care să poată fi aplicată cu deplină siguranţă. Se caută să se grupeze anumite tipuri de probleme asemănătoare prin structura raţionamentului sau prin natura mărimilor cu care se lucrează, aceste indicaţii generale sînt denumite metode de rezolvare.

Scanned with OKEN Scanner

A. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODĂ FIGURATIVĂ

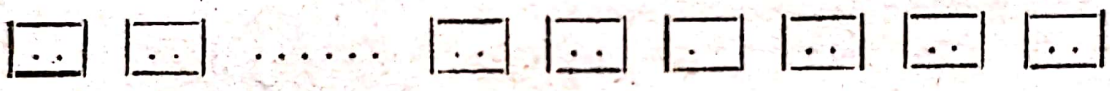
1. Dacă într-o sală de clasă se așează cîte 3 elevi într-o bancă, rămîn 5 bănci libere, iar dacă se așează cîte 2 rămîn 5 elevi în picioare.

Cîți elevi și cîte bănci sînt în clasă?

V. Tomiță — G.M. nr. 11/1985

Soluție: Figurăm băncile prin dreptunghiuri, iar elevii prin puncte. În prima situație elevii și băncile pot fi figurate astfel:

În situația a doua se figurează astfel:



și 5 elevi în picioare

Deci, cele 5 bănci libere au fost ocupate de 10 elevi din alte 10 bănci cu cîte 3 elevi, iar cei 5 elevi care stau în picioare sînt proveniți din alte 5 bănci cu cîte 3 elevi.

Numărul total de bănci este de $10 + 5 + 5 = 20$, iar al elevilor este de 45.

2. 1) Se știe că $\frac{3}{5}$ dintr-un număr reprezintă $\frac{2}{3}$ din alt număr.

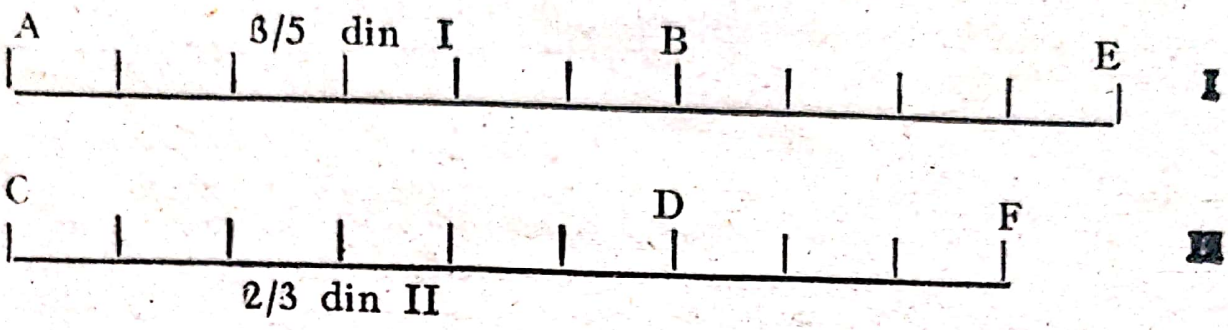
a) Ce fracție cu numitorul 18 din al doilea număr va reprezenta $\frac{4}{5}$ din primul număr?

b) Care sînt cele două numere dacă $\frac{1}{5}$ din primul număr

este cu 1 mai puțin decît $\frac{1}{8}$ din al doilea număr?

Ștefan Tifui — G.M. nr. 1/1984

Soluție:



Prin completarea la $\frac{2}{8}$ din II cu încă $\frac{1}{8}$ din II se obține al doilea întreg, reprezentat prin segmentul CF, analog pe primul întreg AE. Dacă fiecare parte din AE o împărțim în jumătate și fiecare parte din CF o împărțim la 8, ajungem ca acei doi întregi AE și CF să fie divizați în segmente la fel de mari. AE are acum 10 părți iar CF 9 părți, toate la fel de mari.

Problema se poate enunța astfel:

„Se știe că $\frac{6}{10}$ din I reprezintă $\frac{6}{9}$ din al II-lea număr.

a) Ce fracție cu numitorul 18 din al doilea număr va reprezenta $\frac{4}{5}$ din primul număr?"

Deci, $\frac{6}{9}$ din II reprezintă $\frac{6}{10}$ din primul, sau $\frac{12}{18}$ din II reprezintă $\frac{8}{5}$ din I sau $\frac{4}{18}$ din II reprezintă $\frac{1}{5}$ din I sau $\frac{16}{18}$ din II reprezintă $\frac{4}{5}$ din I.

R: $\frac{16}{18}$ din I

b) I număr 10, al II-lea număr 9

3. Trei elevi au economisit la C.E.C. suma de 1 638 lei. Primul elev a economisit de 3 $\frac{1}{2}$ ori mai puțin bani decît al doilea, iar suma economisită de acesta este diferența sumelor economisite de al treilea și primul.

Să se afle suma economisită de fiecare elev.

Gh. Ilinca — G.M. nr. 9/1980

Soluție :

I | p |

II | p | p | p | p/2 |

III | p | p | p | p/2 | p |

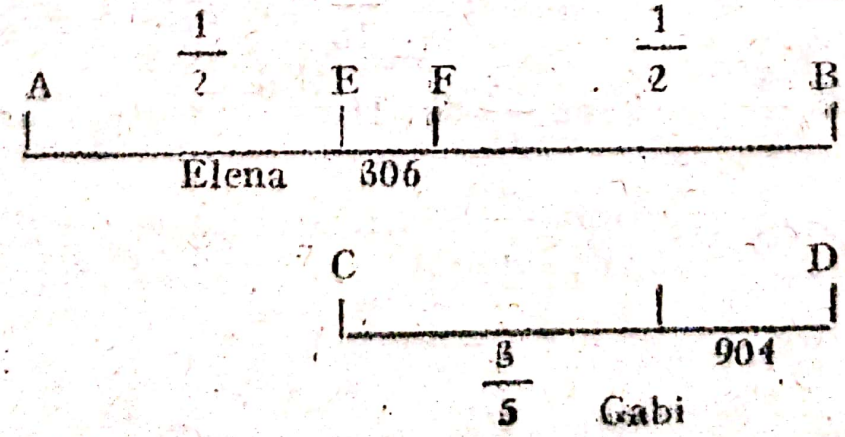
1 638 lei : 9 = 182 lei. Deci I 182 lei, al II-lea 637 lei, al treilea 819 lei.

4. Două eleve, Elena și Gabi, au depus la C.E.C. împreună o sumă de bani. Elena a depus cu 306 lei mai puțin decît $\frac{1}{2}$ din întreaga sumă, iar Gabi a depus $\frac{3}{5}$ din rest și încă 904 lei.

Să se afle întreaga sumă depusă de ele și cît a depus fiecare.

Elena Voicu — G.M. nr. 9/1980

Soluție :



AB reprezintă suma totală, AE suma depusă de Elena, iar CD suma depusă de Gabi.

904 lei reprezintă $\frac{2}{5}$ din suma depusă de Gabi, atunci

904 lei $\times \frac{5}{2} = 2\,260$ lei, suma depusă de Gabi.

FB reprezintă 1 954 lei, iar AB ß 908 lei, adică suma totală depusă de cele două eleve.

3 908 lei — 2 260lei = 1 648 lei, suma depusă de Elena.

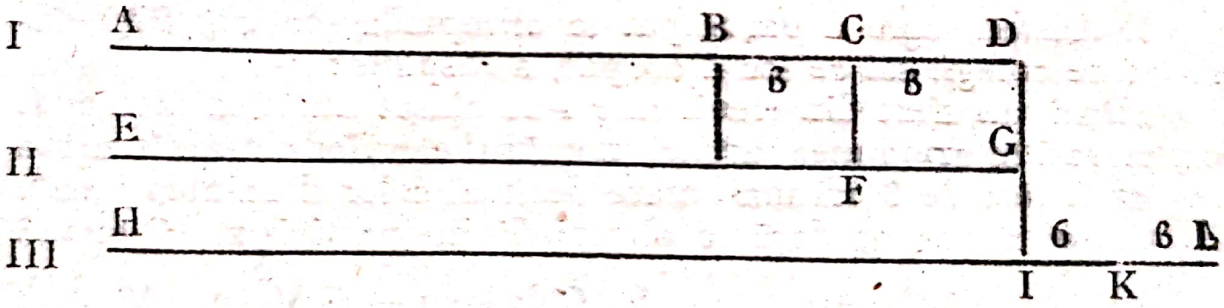
5. Trei elevi au un număr de nuci. Dacă cel de-al treilea i-ar da primului 6 nuci, atunci toți trei elevi ar avea același număr de nuci. Dacă al doilea ar da primului ß nuci, numărul de nuci al primului elev ar fi un număr prim. Dacă al doilea elev ai da 3 nuci celui de-al treilea, atunci numărul de nuci al acestuia ar fi tot un număr prim.

Cele două numere prime astfel obținute ar fi singurii divizori ai numărului $\overline{1aa}$, iar suma lor s-ar divide cu $\overline{1a}$.

Cîte nuci are fiecare elev?

C. Dragomir — G.M. nr. ß/1981

Soluție :



Desenul s-a executat după condițiile problemei, atunci III — AC = ß + 6 + ß = 12.

Deci, după ce și primul și al treilea au primit cîte 3 nuci, diferența între al treilea și primul este de 12 nuci. Cum numărul 133 se scrie ca produsul dintre 7 și 19, iar 7 + 19 = 26 care se divide prin 13, rezultă că primul elev, după ce a primit 3 nuci, are acum 7 nuci, deci la început a avut 4 nuci. Al treilea, după ce a primit 3 nuci, are acum 19 nuci. Deci la început a avut 16 nuci, iar al doilea a avut la început 10 nuci.

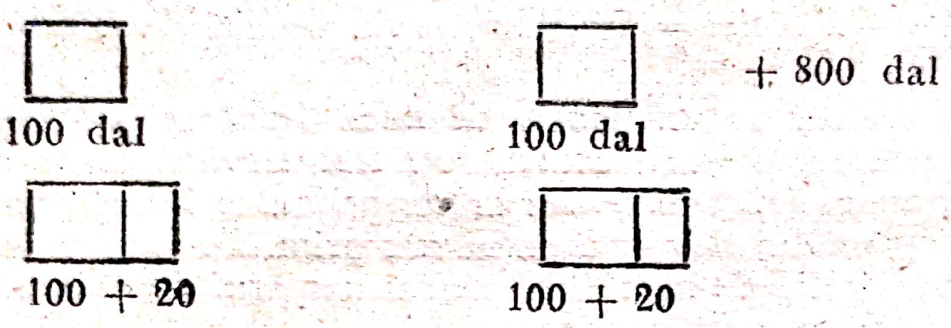
R : 4; 10; 16

6. Un centru de vinificație dispune de un același număr de butoaie de 100dal și 120 dal. Dacă s-ar depozita vinul de o anumită calitate în butoaie de 100 dal, ar rămîne neîmbutoiați 800 dal de vin, iar dacă s-ar depozita în butoaie de 120 dal, ar rămîne un butoi gol.

Să se afle cantitatea de vin și numărul butoaielor de 100 dal.

I. Albescu — G.M. nr. 9/1977

Soluție :



Cantitatea de 800 dal + 100 dal reprezintă diferența de cîte 20 dal pentru butoaiele mai mari din care lipsește unul singur. Deci, 900 dal : 20 dal = 45 butoaie pline de cîte 120 dal. Numărul total de butoaie de 120 dal, ca și cel de 100 dal, este de 46. Cantitatea totală va fi 100 dal × 46 + 800 dal = 5 400 dal.

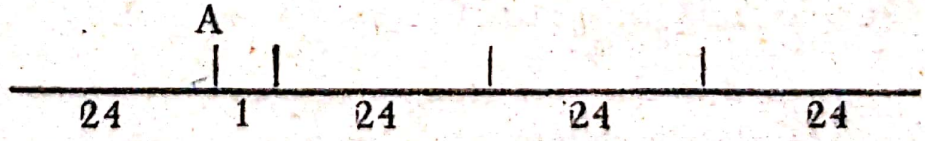
7. Adrian, care a participat la olimpiada școlară, fiind întrebat de colegii săi ce loc a ocupat, a răspuns :

„Dacă un sfert din elevii care s-au clasat înaintea mea ar fi fost clasați în urma mea, atunci numărul elevilor clasați în urma mea ar fi fost de 5 ori mai mare decît al celor dinaintea mea".

Ce loc a ocupat dacă la olimpiadă au participat 97 elevi?

V. Ghizdavu — G.M. nr. 10/1980

Soluție : Dacă s-ar fi întîmplat situația descrisă de Adrian, atunci poziția în clasament ar fi fost conform desenului :



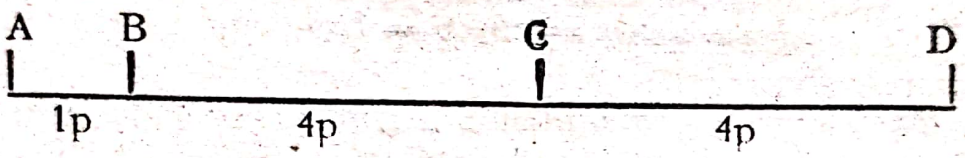
97 — 1 = 96 (elevi)
96 : 4 = 24 (elevi)

24 elevi reprezintă $\frac{3}{4}$ din cei clasați în față, adică 24 elevi, atunci $\frac{1}{4}$ reprezintă 8 elevi. Deci Adrian a avut 24 + 8 = 32 (elevi) în față și el s-a clasat al treizeci și treilea.

8. Un elev nu are 500 lei. Dacă ar avea de 9 ori decît are, atunci ar depăși suma de 500 lei cu tot atîția lei cîți îi lipsesc. Cîți lei are elevul?

Juliu Ursu — G.M. nr. 7/1981

Soluție :



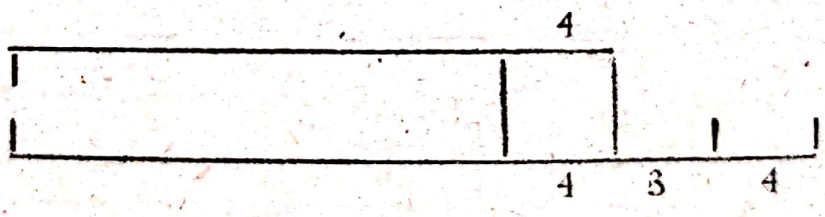
AC reprezintă 500 lei, deci AB reprezintă 100 lei.

R : 100 lei

9. În clasa a V-a a Școlii Nr. 1 din Curtea de Argeș sînt băieți și fete. Numărul băieților este cu 3 mai mare decît numărul fetelor. Dacă în clasă ar mai veni 4 băieți și ar pleca 4 fete, atunci numărul băieților ar fi de 2 ori mai mare decît numărul fetelor. Să se afle cîți elevi sînt în clasă.

Ion Ilea — G.M. nr. 12/1980

Soluție :

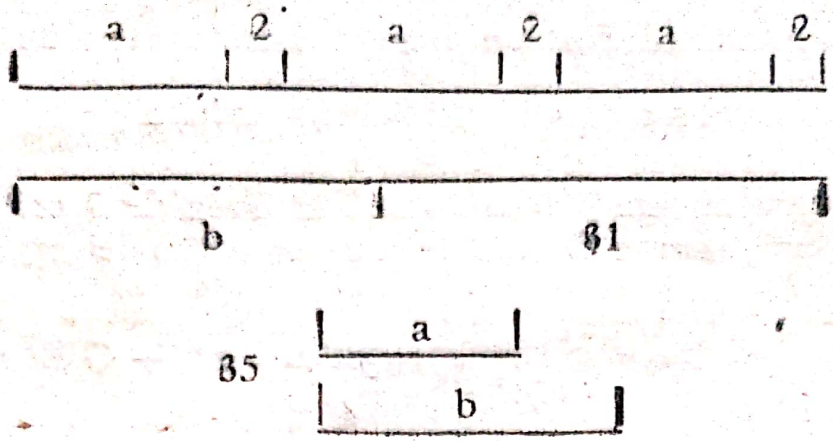


R : 15 fete și 18 băieți

10. Suma a două numere este 35. Dacă primul număr s-ar mări cu 2 și al doilea cu 31, atunci al doilea număr ar fi de 3 ori mai mare decît primul. Să se afle cele două numere.

V. Robu — G.M. nr. 8/1980

Soluție :

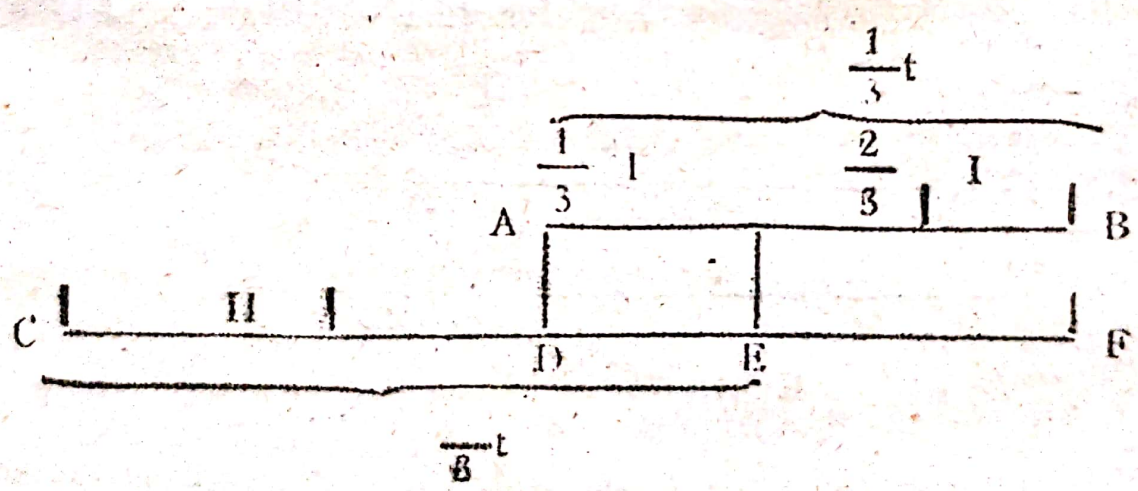


R : a = 15, b = 20

11. Doi elevi au economisit o anumită sumă de bani. Dacă primul elev ar da celui de-al doilea $\frac{1}{8}$ din cîți bani are el, atunci al doilea ar avea $\frac{2}{8}$ din toată suma. Care este raportul dintre sumele elevilor ?

Ioan Moraru — G.M. nr. 12/1977

Soluție :



AB — primul elev
CD — al doilea elev

R : Raportul sumelor pe care le au este 1.

12. Trei elevi au economisit fiecare cîte o sumă de bani pentru a merge într-o excursie în nordul Moldovei. Dacă primul i-ar da 25 lei celui de-al doilea, atunci ar avea amîndoi sume egale, însă al treilea ar avea acum cu 65 lei mai mult decît fiecare din ceilalți doi. Ce sumă a economisit fiecare dacă împreună au 680 lei?

Georgică Manole — G.M. nr. 1/1977

R: 230 lei, 180 lei, 270 lei

13. Sorin, Alina, Luminița și Camelia au economisit bani pentru o excursie. Ce sumă a economisit fiecare dacă trei cîte trei au economisit sumele 180 lei, 190 lei, 200 lei, 210 lei?

N. Ivășchescu — G.M. nr. 10/1978

R: 50 lei, 60 lei, 70 lei, 80 lei

14. Într-o magazie sînt saci cu făină de trei calități. Cu făină de calitatea I sînt de 3 ori mai mulți decît de calitatea a II-a, iar de calitatea a III-a sînt de 8 ori mai puțini decît de cele două calități împreună. Cîți saci sînt din fiecare calitate dacă de calitatea a II-a sînt cu 5 saci mai puțini decît de calitatea a III-a?

Claudiu Băețică — G.M. nr. 9/1977

15. Aurel, Bogdan și Ciprian au la C.E.C. suma de 6 871 lei. Aurel are cu 3 lei mai puțin decît Bogdan și cu 9 lei mai mult decît îndoitul lui Ciprian. Cîți lei are fiecare la C.E.C.?

Cristian Anghel Băloi — G.M. nr. 9/1986

R: Ciprian 1 370 lei, Aurel 2 749 lei, Bogdan 2 752 lei

16. Două numere naturale sînt astfel încît diferența lor este 226 lei, iar primul număr mărit cu 2 este de 8 ori mai mic decît al doilea. Să se afle cele două numere.

Olimpia Popescu — G.M. nr. 9/1986

R: 30; 256

17. Cei 260 elevi ai unei școli au fost împărțiți în 4 grupe. Numărul elevilor grupei a II-a este jumătate din numărul elevilor grupei I și a II-a la un loc. Împărțind numărul elevilor grupei a IV-a la numărul elevilor grupei a II-a se obține cîtul 2 și restul 35. Știind că fiecare grupă nu are mai puțin de 1/3 din numărul grupei a IV-a, să se afle cîți elevi pot fi în fiecare grupă.

Ioan Duicu — G.M. nr. 8/1986

Scanned with OKEN Scanner

R: II = 45 elevi; I + III = 90 elevi; IV = 125 elevi. Avem mai multe soluții

I = 42 elevi; II = 45 elevi; III = 48 elevi; IV = 125 elevi;
I = 43 elevi; II = 45 elevi; III = 47 elevi; IV = 125 elevi
ș.a.m.d.

18. În 3 lăzi sînt 90 mere. Dacă transferăm din lada a doua în prima ladă 3 mere, atunci prima ladă are cu un măr mai mult decît în a doua ladă, iar dacă transferăm din lada a doua 5 mere în lada a treia, atunci lada a doua conține cu 15 mere mai multe decît lada a treia. Să se găsească cîte mere sînt în fiecare ladă.

Alexandru Blaga — G.M. nr. 7/1986

R: 35 mere; 40 mere; 15 mere

19. Să se afle numărul concurenților și numărul bărcilor dintr-un concurs știind că numărul bărcilor reprezintă 1/3 din sfertul numărului concurenților, iar suma dintre numărul bărcilor și numărul concurenților este 104.

R: 8 bărci și 96 concurenți

20. Doi elevi aveau o sumă de bani. A patra parte din banii pe care îi avea primul este egală cu a treia parte din cît avea al doilea. Semisuma banilor care-i aveau amîndoi este egală cu 42. Ce sumă avea fiecare elev?

Gh. Ghinea — G.M. nr. 11/1978

R: I = 48 lei; II = 36 lei

21. Mihaela are de 8 ori mai puțini lei decît Ionel. După ce Ionel cheltuiește 2 lei, iar Mihaela primește cu 4 lei mai mult decît de 5 ori suma pe care a avut-o, sumele lor devin egale. Ce sumă a avut fiecare?

Marin Grigorescu — G.M. nr. 5/1978

R: 2 lei Mihaela, 16 lei Ionel

22. Participînd la o excursie organizată de școală, un elev a primit de la părinți o sumă de bani. Dacă ar fi cheltuit cîte 15 lei pe zi de excursie, în ultima zi ar mai fi avut numai

10 lei. Atunci și-a repartizat pentru fiecare zi cîte 10 lei și i-au rămas 35 lei. Cîte zile a durat excursia?

I. Vărzaru — G.M. nr. 2/1973

R: 5 zile

23. Un biciclist parcurge distanța dintre două orașe în 8 zile. În a treia zi parcurge jumătate din distanța pe care a parcurs-o în prima zi, iar în prima zi parcurge o distanță de 8 ori mai mare decît cea parcursă în a doua zi. Știind că bicicliștul a parcurs a treia zi cu 8 km mai mult decît a parcurs a doua zi, se cer distanțele pe care le-a parcurs biciclistul în fiecare zi, precum și distanța dintre cele două orașe.

Alexandru Vancea — G.M. nr. 9/1979

R: I zi — 18 km; a II-a zi — 6 km; a III-a zi — 9 km. Distanța totală — 88 km

24. Să se calculeze vîrstele tatălui și a celor 8 fii ai săi știind că tatăl are cu un an mai mult decît triplul vîrstei băiatului mai mare, a cărui vîrstă este egală cu suma vîrstelor celor doi frați mai mici, între care este o diferență de 1 an, iar peste 7 ani vîrstele copiilor vor însuma exact vîrsta ce o va avea tatăl atunci.

Viorel Grigore — G.M. nr. 8/1981

R: 40 ani; 18 ani; 7 ani; 6 ani

25. În clasele a V-a A și a V-a B ale unei școli sînt 64 elevi. Dacă s-ar muta 8 elevi din prima clasă în cealaltă, prima ar avea cu 2 elevi mai mult decît a doua.

Cîți elevi sînt în fiecare clasă?

Corina Pelmuș — G.M. nr. 8/1984

R: clasa a V-a A — 36 elevi; clasa a V-a B — 28 elevi

26. Într-o familie sînt 8 copii. Ionuț este cu 8 ani mai mic decît Sandu, iar Sandu este cu 6 ani mai mare decît Cătălina.

a) Ce vîrstă are în prezent fiecare copil dacă acum doi ani vîrsta lui Sandu era cît suma vîrstelor celorlalți copii?

b) Ce vîrstă au părinții copiilor dacă tata este cu 2 ani

Scanned with OKEN Scanner

mai mare decît mama, iar suma vîrstelor actuale ale lor este cît suma vîrstelor pe care cei 8 copii le vor avea peste 14 ani?

D. Săvulescu — G.M. nr. 8/1984

R: a) Cătălina are 5 ani, Sandu 11 ani, iar Ionuț 8 ani
b) tata are 35 ani, iar mama are 32 ani

27. Ionel, mama și bunica au împreună 105 ani. Ionel este mai mic decît bunica de 11 ori, iar bunica este de două ori mai mare ca mama. Să se afle:

a) vîrsta fiecărei persoane;

b) peste cîți ani vîrsta lui Ionel va reprezenta $\frac{8}{23}$ din vîrsta bunicii;

c) ce parte din vîrsta mamei va reprezenta vîrsta lui Ionel atunci.

Radu Miculescu — G.M. nr. 5/1985

R: a) Ionel are 6 ani, mama 33 ani, bunica 66 ani.
b) peste 3 ani
c) Ionel are o pătrime din vîrsta mamei.

28. De la un depozit se aprovizionează cu făină două magazine alimentare. În primul magazin s-au adus o dată de 6 ori mai multă făină ca la al doilea. Dacă se vînd 200 kg făină de la primul magazin și se mai aduc 520 kg făină la al doilea, atunci cantitatea de făină din cele două magazine devine egală. Cîtă făină a fost adusă la început în fiecare magazin?

Florica Ghizdavu — G.M. nr. 7/1985

R: I = 540 kg; II = 3 024 kg

29. La un magazin alimentar sînt un număr de sticle și un număr de lăzi. Dacă în fiecare ladă s-ar așeza 15 sticle, ar rămîne două lăzi goale. Să se afle cîte lăzi și cîte sticle sînt știind că numărul lăzilor reprezintă 0,2 din jumătatea numărului sticlelor.

Georgiana Mirea — G.M. nr. 4/1986

R: 60 sticle, 6 lăzi

Scanned with OKEN Scanner

30. Trei elevi au depus la C.E.C. cîte o sumă de bani. Să se afle soldul fiecărui elev știind că primul a depus $\frac{10}{9}$ din suma depusă de al doilea și cu 40 lei mai puțin ca al treilea, iar al doilea a depus $\frac{8}{4}$ din suma depusă de al treilea.

Ludovica Popescu — G.M. nr. 10/1986

R: I — 200 lei; II — 180 lei; III — 240 lei

31. Pentru 2 m stofă s-au plătit două bancnote de aceeași valoare și s-au primit 23 lei rest. Altă dată, pentru 5 m de aceeași stofă s-au plătit 4 bancnote de aceeași valoare ca prima dată și încă 42,50 lei. Să se afle costul unui metru de stofă și ce valoare are o bancnotă.

Ioan Rat — G.M. nr. 5/1977

R: 1 m costă 88,50 lei, iar o bancnotă are valoarea de 100 lei

32. Știm că 3 numere îndeplinesc următoarele condiții: primul este cu 5 mai mare decît al doilea, al doilea este de 4 ori mai mic decît al treilea, iar al treilea este cu 1 mai mare decît primul. Să se afle numerele.

C. Apostol — G.M. nr. 11—12/1987

R: I — 7; II — 2; III — 8

33. Tatăl are atîția ani cît mama și fiul împreună. Cînd fiul va avea cu încă de 3 ori mai mulți ani, adică $\frac{2}{5}$ din cît va avea mama, toți trei vor avea 100 ani. Ce vîrstă are fiecare?

Tudor I. Băiețică — G.M. nr. 8/1978

R: 4 ani; 28 ani; 32 ani

34. Tatăl are 46 ani, fiul are 19 ani. Cu cîți ani în urmă tatăl era de 4 ori mai în vîrstă decît fiul?

Gh. Ghinea — G.M. nr. 7/1980

R: cu 10 ani în urmă

Scanned with OKEN Scanner

35. Diferența dintre vîrsta mamei și cea a fiului este de 28 ani. Vîrsta mamei, raportată la vîrsta tatălui, este $\frac{5}{7}$ și vîrsta fiului, raportată la vîrsta tatălui, este $\frac{1}{4}$. Ce vîrstă are fiecare?

R: tata — 48 ani, mama — 40 ani, fiul — 12 ani

36. Daniela, împreună cu tatăl său și cu bunica sa, au 90 ani. Peste 2 ani tata va avea de 8 ori vîrsta fiicei, iar bunica de 2 ori vîrsta actuală a tatălui. Ce vîrstă are fiecare?

Adrian Vlada — G.M. nr. 5/1980

R: Daniela are 2 ani, tata are 30 ani, iar bunica 58 ani.

37. A spune lui B: „Acum 35 de ani aveam vîrsta ta, iar peste 18 luni raportul vîrstelor noastre va fi egal cu 3". Să se afle vîrstele lui A și B.

Gh. Nedelea — G.M. nr. 6/1988

R: A — 51 ani, B — 16 ani

38. Tatăl și fiul au împreună 35 de ani, bunicul și nepotul au împreună 55 de ani, iar vîrsta bunicului este de $\frac{5}{3}$ ori mai mare decît vîrsta tatălui. Ce vîrstă are fiecare?

Viorica Mureșan — G.M. nr. 8/1977

R: fiul — 5 ani, tata — 30 ani, bunicul — 50 ani

B. METODA FALSEI IPOTEZE

1. O expediție pleacă pe munte la ora 8 și se înapoiază în tabără la ora 18. Știind că a făcut la urcuș 2 km pe oră, iar la coborîre 4 km pe oră și că în vîrful muntelui s-a odihnit 30 minute să se afle lungimea drumului parcurs.

Florea Cristescu — G.M. nr. 9/1977

Soluție: Timpul total dus-întors este 5 ore $-\frac{1}{2}$ ore $=$ $=\frac{9}{2}$ ore. Presupunem că drumul de jos pînă sus ar fi de 2 km, atunci timpul dus-întors ar fi 1 oră $+\frac{1}{2}$ oră $=\frac{3}{2}$ ore. Drumul real va fi raportul $\frac{9}{2}$: $\frac{3}{2}=3$ înmulțit cu 2 km. Deci 2 km $\times$ 3 = 6 km.

2. În cadrul unui concurs un elev obține pentru 8 răspunsuri 46 de puncte. Să se afle cîte răspunsuri au fost corecte și cîte greșite, știind că pentru un răspuns corect a obținut 10 puncte, iar pentru un răspuns greșit a pierdut 7 puncte.

Ilie Florescu — G.M. nr. 1/1976

Soluție: Presupunem că toate cele 8 răspunsuri ar fi fost corecte, atunci 10 puncte $\times$ 8 = 80 puncte.

Diferența față de realitate va fi 80 puncte — 46 puncte = = 34 puncte.

Diferența între a rezolva și a nu rezolva corect va fi 10 puncte + 7 puncte = 17 puncte.

De cîte ori diferența pentru un răspuns se va cuprinde în diferența totală, va da numărul de răspunsuri greșite.

34 puncte : 17 puncte = 2 răspunsuri greșite.

Deci, 6 răspunsuri sînt corecte.

8. Două brigăzi, avînd împreună 25 tractorişti, ară în 10 zile 2 050 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 7 ha pe zi, iar unul din cea de a doua brigadă 10 ha pe zi.

a) Cîţi tractorişti sînt în fiecare brigadă?

b) Ce economie de combustibil se realizează dacă un tractorist din prima brigadă economiseşte 2 litri de combustibil la hectar, iar un tractorist din cea de a doua brigadă economiseşte un litru la hectar, ştiind că un litru de combustibil costă 4 lei?

Augustina Paraschivescu — G.M. nr. 8/1984

R: a) 15 tractorişti sînt în prima brigadă;
10 tractorişti în a doua brigadă
b) 12 400 lei.

4. La un depozit s-au adus 48 saci de orez, unii de 50 kg, alţii de 54 kg şi alţii de 63 kg. Să se afle cîţi saci au fost de fiecare fel, ştiind că numărul sacilor de 50 kg era cu 8 mai mic decît triplul celor de 54 kg şi că în total s-au adus 2 552 kg de orez.

Gh. Herescu — G.M. nr. 9/1985

Soluţie: Dacă am adăuga 8 saci a cîte 50 kg fiecare, cantitatea totală s-ar mări cu 400 kg şi problema s-ar enunţa astfel: „La un depozit s-au adus 56 saci de orez, unii de 50 kg, alţii de 54 şi alţii de 63 kg. Să se afle cîţi saci au fost de fiecare fel ştiind că numărul sacilor de 50 kg este triplul sacilor de 54 kg şi că în total s-au adus 2 952 kg orez".

Problema se rezolvă prin două ipoteze.

Prima ipoteză

Presupunem că sînt 30 saci de 50 kg, atunci sînt 10 saci de cîte 50 kg şi 16 saci de 63 kg. Numărul de kilograme va fi:

50 kg × 30 = 1 500 kg
54 kg × 10 = 540 kg
63 kg × 16 = 1 008 kg, în total 3 048 kg

A doua ipoteză

Presupunem că ar fi 33 saci de 50 kg, atunci ar fi 11 saci de cîte 54 kg şi 12 saci de cîte 63 kg. Numărul total de kilograme ar fi:

50 kg × 33 = 1 650 kg
54 kg × 11 = 594 kg
63 kg × 12 = 756 kg, în total 3 000 kg

Scanned with OKEN Scanner

Deci, dacă mărim cu 3 numărul sacilor de 50 kg atunci numărul total de kilograme se micşorează cu 48, adică, dacă se măreşte numărul sacilor de 50 kg cu 1, atunci se micşorează numărul kilogramelor cu 16 kg.

Dar prin prima ipoteză am găsit 3 048 kg, adică o diferenţă de 3 048 kg — 2 952 kg = 96 kg faţă de realitate. De cîte ori se cuprinde 16 în 96 cu atîţia saci de 50 kg trebuie să mărim cei 30 de saci : 96 kg : 16 kg = 6(saci)

Deci, pentru al doilea enunţ al problemei avem : 36 saci de 50 kg, 12 saci de 54 kg şi 8 saci de 63 kg. Dar nu trebuie să uităm că s-a mărit cu 8 saci de 50 kg.

R : 28 saci de 50 kg ; 12 saci de 54 kg ; 8 saci de 63 kg

5. La construcţia unui dig s-au transportat saci cu nisip. Să se calculeze cîţi saci s-au transportat şi cîte camioane au fost utilizate, ştiind că dacă fiecare camion ar fi transportat cîte 45 saci, unul din camioane ar fi transportat numai 36 saci, iar 7 camioane ar fi rămas fără încărcătură, iar dacă fiecare camion ar fi încărcat cîte 40 saci ar fi rămas 486 saci netransportaţi.

Gh. Herescu — G.M. nr. 9/1985

Soluţie : Folosim aceeaşi metodă ca în problema nr. 4 de mai sus.

Prima ipoteză

Presupunem 100 camioane.

a) În prima situaţie se transportă 4 176 saci.

b) În a doua situaţie s-ar transporta 4 000 saci, la care se adaugă cei 486 saci, deci 4 486 saci.

Diferenţa între cele două situaţii este de 4 486 — 4 176 = = 310 (saci).

Trebuie să găsim numărul corect de camioane pentru ca această diferenţă să fie zero.

A doua ipoteză

Presupunem 101 camioane.

a) În prima situaţie ar fi 4 221 saci.

b) În a doua situaţie ar fi 4 040 + 486 = 4 526 (saci).

Diferenţa dintre cele două situaţii ar fi :

4 526 — 4 221 = 805 (saci)

Scanned with OKEN Scanner

Deci, dacă mărim numărul camioanelor de la 100 cu un camion, diferența se micșorează cu 5 saci. Pentru ca diferența de 810 saci să dispară, va trebui să mărim numărul camioanelor de la 100 cu 810 : 5 = 62 (camioane).

R : 162 camioane și 6 966 saci

6. Într-o curte sînt găini, rațe și oi. Știind că în total sînt 100 capete, 280 picioare, iar numărul rațelor este o treime din numărul găinilor, să se afle cîte găini, cîte rațe și cîte oi sînt în curte.

Liviu Mihail Smărăndoiu — C.M. nr. 4/1986

R : 40 oi, 15 rațe, 45 găini

7. Într-o curte sînt găini și iepuri, avînd în total 1 890 de picioare. Să se afle cîte găini și cîți iepuri sînt, cunoscînd că numărul găinilor este de 7 ori mai mare decît al iepurilor

Magdalena Fărcășanu — G.M. nr. 6/1978

R : 105 iepuri și 735 găini

8. La o gospodărie se cresc oi și curci, care au 650 de capete și 2260 de picioare. Cîte oi și cîte curci sînt în gospodărie ?

C. Drugan — G.M. nr. 5/1981

R : 170 curci și 480 oi

9. Într-un bloc sînt 88 de apartamente cu două și, respectiv, 3 camere. Cîte apartamente cu două camere și cîte cu trei camere sînt, dacă numărul camerelor este 198 ?

I. Ivășchescu — G.M. nr. 9/1977

R : 22 apartamente cu 3 camere și 66 apartamente cu 2 camere

10. La un meci de fotbal, un bilet pentru tribuna I costă 18 lei, iar pentru peluză 7 lei. Știind că într-o școală s-au cumpărat bilete în valoare de 143 lei, să se afle cîți elevi au urmărit meciul de la tribuna I și cîți de la peluză.

Gh. Molea — G.M. nr. 12/1977

R : Prima soluție : 4 elevi de la tribuna I și 18 elevi de la peluză.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția a doua : 11 elevi de la tribuna 1 și nici un elev de la peluză.

11. Două categorii de piese cîntăresc respectiv cîte 9 kg și 23 kg fiecare. Dacă 100 piese din ambele categorii cîntăresc în total 1 390 kg, să se afle cîte piese sînt de fiecare categorie.

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 2/1979

R : 65 piese de 9 kg fiecare și 25 piese de 23 kg fiecare

12. Într-un sertar sînt monede de 1 leu, de 3 lei și de 5 lei, însumînd 95 lei. Cîte monede de fiecare fel sînt în sertar dacă monedele de 5 lei sînt de 3 ori mai multe decît cele de 3 lei, iar cele de 3 lei și cele de 1 leu sînt în număr egal?

Angela Dociu — G.M. nr. 10/1984

R : 15 monede de 5 lei, 5 monede de 3 lei, 5 monede de 1 leu

13. Un muncitor are o sumă de 750 lei în monede de 5 lei și bancnote de 10 lei și 25 lei. Să se afle numărul acestor 3 feluri de monede și bancnote, dacă numărul bancnotelor de 10 lei este jumătate din cel al monedelor de 5 lei, iar numărul bancnotelor de 25 lei reprezintă a cincea parte din numărul celor de 5 lei.

Anton Negrilă — G.M. nr. 6/1980

R : 50 monede de 5 lei, 25 bancnote de 10 lei și 10 bancnote de 25 lei

14. Un țăran are vaci, porci, găini și rațe, în total 70 capete și 160 picioare. Știind că numărul vacilor reprezintă $\frac{3}{7}$ din numărul porcilor, iar numărul rațelor $\frac{1}{4}$ din al găinilor, să se afle cîte vaci, cîți porci, cîte găini și cîte rațe are țăranul.

Petre Țelinoiu

R : 3 vaci, 7 porci, 48 găini, 12 rațe

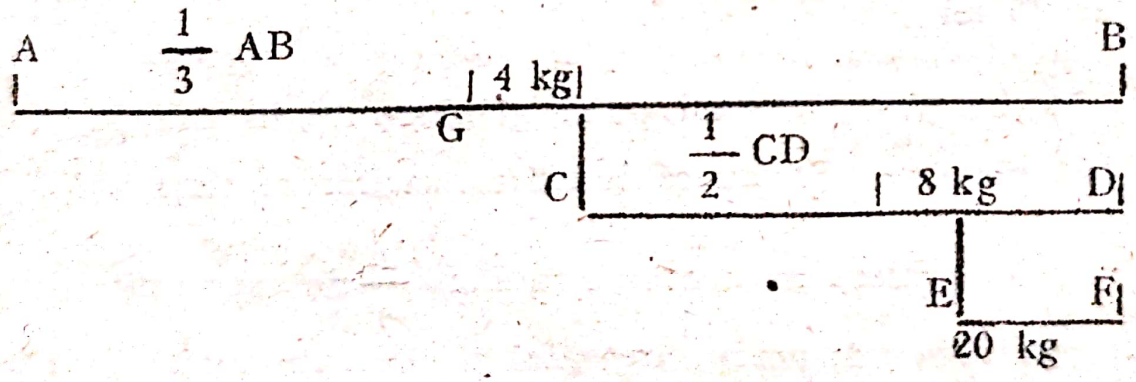
C. METODA MERSULUI INVERS

1. La un magazin de legume-fructe se aduce o cantitate de mere. Jumătate din ea se vinde în 3 zile astfel: în prima zi $\frac{1}{3}$ și încă 4 kg, în a doua zi $\frac{1}{2}$ din rest și încă 8 kg, iar în a treia zi restul de 20 kg.

Cealaltă jumătate se vinde în a patra și a cincea zi iar raportul cantităților vîndute este de $\frac{1}{2}$. Ce cantități de mere s-au vîndut în a patra și a cincea zi?

Lavinia Ferche — G.M. nr. 4/1978

Soluție: Considerăm prima jumătate din cantitatea totală. În aplicarea metodei mersului invers ne putem folosi și de metoda figurativă pentru înțelegerea mai clară a acestei metode. Reprezentăm prima jumătate prin segmentul AB.



28 kg reprezintă $\frac{1}{2}$ CD, deci CD reprezintă 56 kg, atunci GB reprezintă 60 kg și AB reprezintă 90 kg. Cealaltă jumătate din cantitatea totală de mere vîndute a patra și a cincea zi este tot de 90 kg. Din condiția problemei rezultă că în a patra zi s-au vîndut 30 kg, iar a cincea zi 60 kg.

2. La un aprozar s-a adus o cantitate de mere din care s-a vîndut în prima zi jumătate din ea, a doua zi $\frac{2}{5}$ din cantitatea rămasă, după care au mai rămas 242 kg.

Ce cantitate de mere s-a adus la aprozar ?

x x x — G.M. nr. 5/1986

3. Pe un teren agricol a fost semănată floarea-soarelui $\frac{1}{4}$ din el plus 80 ha, iar cu grîu $\frac{5}{9}$ din rest și încă 120 ha. Să se afle cîte hectare are întregul teren agricol.

Ioan Drăghicioiu — G.M. nr. 9/1980

R: 400 ha

4. O întreprindere a repartizat pentru premierea a patru muncitori, care au realizări deosebite în muncă, o sumă de bani. În raport cu realizările obținute, primul a primit $\frac{2}{5}$ din întreaga sumă, al doilea a primit $\frac{1}{2}$ din rest, al treilea a primit $\frac{2}{3}$ din suma rămasă după ce și-au luat drepturile primul și al doilea muncitor, iar al patrulea a primit 200 lei.

Ce sumă a repartizat întreprinderea pentru premierea celor 4 muncitori și cît a primit fiecare muncitor ?

I. I. Cioacă — G.M. nr. 9/1980

R: 2 000 lei, I — 800 lei, II — 600 lei, III — 400 lei, IV — 200 lei.

5. Cineva are o sumă de bani din care cheltuiește o dată $\frac{2}{3}$ și apoi succesiv $\frac{3}{4}$ din rest, $\frac{4}{5}$ din noul rest și $\frac{5}{6}$ din noul rest, în felul acesta rămînîndu-i 1 leu.

Ce sumă de bani a avut la început ?

Constantin Badea — G.M. nr. 2/1978

Scanned with OKEN Scanner

6. Rodica s-a dus să facă cumpărături. Prima dată a cheltuit cu 4 lei mai puțin decît $\frac{3}{5}$ din suma pe care o avea, a doua oară a cheltuit $\frac{1}{4}$ din rest plus 8 lei, iar a treia oară $\frac{2}{5}$ din noul rest plus 1,20 lei și i-au mai rămas 24 lei.

Ce sumă a avut Rodica și cît a cheltuit de fiecare dată?

Rodica Toporău — G.M. nr. 1/1977

R: 140 lei, **I** — 80 lei, **II** — 18 lei, **III** — 18 lei

7. Într-un siloz se află o anumită cantitate de cereale: $\frac{1}{6}$ grîu, $\frac{1}{4}$ din rest porumb, $\frac{8}{5}$ din noul rest este ovăz, $\frac{2}{9}$ din cel de-al treilea rest este secară, iar restul de 8,5 tone este orz.

Ce cantitate de cereale se află în siloz?

Sorin Petcu — G.M. nr. 12/1977

R: 8t grîu, $\frac{15}{4}$ t porumb, $\frac{27}{4}$ t ovăz, 1 t secară și 8,5 t orz.

8. Pentru confecționarea unor coșulețe, elevii unei clase au folosit întreaga cantitate de sîrmă repartizată pentru această lucrare în felul următor:

— în prima zi 0,(8) din toată sîrma și încă 80 m,

— în a doua zi 0,8(8) din rest și încă 50 m;

— a treia zi 0,88(8) din noul rest și încă 20 m.

Să se afle lungimea totală a sîrmei și cît s-a folosit în fiecare zi.

Emil Nică — G.M. nr. 1/1981

R: 800 m, I zi 180 m, **II** zi 90 m, **III** zi 80 m

9. O persoană pleacă de acasă cu o sumă de bani. La intrarea în primul magazin cumpără ghiocei de 1 leu, în magazin cheltuiește jumătate din suma de bani rămasă, iar la ieșirea din magazin mai cumpără de 1 leu o felicitare. Procedează analog încă în două magazine și se întoarce acasă cu 2 lei.

Cu ce sumă de bani a plecat de acasă?

Petre Telinoiu

Scanned with OKEN Scanner

10. O brigadă de tractoriști are de arat în 3 zile o suprafață de teren. În prima zi ară $\frac{1}{3}$ din suprafață, a doua zi $\frac{2}{5}$ din rest și încă 54 ha, iar pentru a treia zi a rămas $\frac{1}{4}$ din suprafața inițială.

Ce suprafață a avut de arat și cît s-a arat în fiecare zi?

Malvina Rațiu — G.M. nr. 7/1981

Scanned with OKEN Scanner

D. PROBLEME DE MIȘCARE

1. Doi călători pornesc deodată unul spre celălalt din localitățile A și B. Primul parcurge 4 km pe oră, iar al doilea 5 km pe oră. Să se calculeze după cît timp se întîlnesc știind că primul ar putea străbate distanța dintre cele două localități în 4 ore și jumătate.

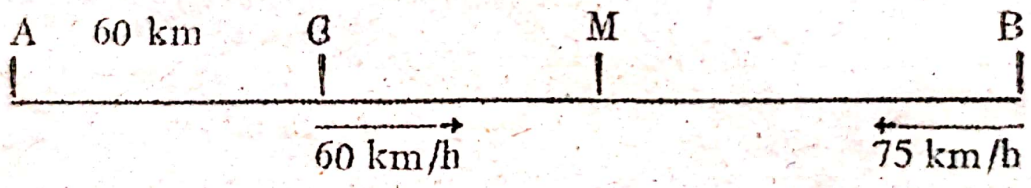
Dana — Lina Vasile — G.M. nr. 11/1985

Soluție : $v_1 = 4\text{km/h}$; $v_2 = 5$ km/h ; AB = 4km · 4,5h = = 18 km ; $t = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{18\text{km}}{9\text{ km/h}} = 2$ h R : 2 h

2. Din localitatea A pleacă spre localitatea B un automobil cu viteza de 60 km/h, iar după o oră pleacă din localitatea B spre A un automobil cu viteza de 75 km/h. Știind că cele două automobile mobile s-au întîlnit la jumătatea distanței dintre cele două localități, să se determine distanța dintre A si B.

Iulian — Ioan Benyi —G.M. nr. 12/1982

Soluție :



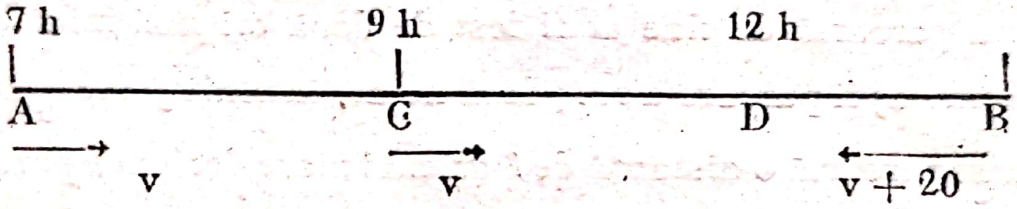
Pentru a se întîlni la mijlocul segmentului AB va trebui ca acei 60 km în plus pe care îi are automobilul din A trebuie să fie compensați de cei 75 km — 60 km = 15 km. Deci 60 km : : 15 km = 4 ore, timpul de întîlnire după plecarea automobilului din B, sau 5 ore după plecarea automobilului din A

AM = 5 h · 60 km/h = 300 km, atunci AB = 600 km

3. Distanța dintre localitățile A și B este de 540 km. Din A pleacă la ora 7 un automobil spre B, iar din B pleacă la ora 9 spre A un alt automobil, care are viteza cu 20 km/h mai mare. Cele două automobile se întîlnesc la ora 12. Să se afle vitezele celor două automobile și distanța parcursă de fiecare pînă cînd se întîlnesc.

Gh. Bostan — G.M. nr. 6/1977

Soluție: Notăm cu v viteza automobilului din A, iar v + 20 viteza celui din B.



AC = 2v, BC = 540 — 2v. Cum timpul de la plecarea simultană, adică ora 9, pînă la întîlnirea de la ora 12 este de 3 ore, scriind relația $t = \frac{d}{v_1 + v_2}$ avem $3 = \frac{540 - 2v}{v + v + 20}$, rezultă v = 60 km/h.

R: 60 km/h; 80 km/h; 240 km de B și 300 km de A.

4. Un cîine aleargă după un iepure care se află cu 40 de sărituri înaintea cîinelui. Cîinele face 7 sărituri în timp ce iepurele face 9, dar 3 sărituri de-ale cîinelui sînt cît 5 sărituri de-ale iepurelui. Cîte sărituri trebuie să facă cîinele, ca să ajungă iepurele?

Culegere de probleme

Soluție: Dacă 3 sărituri de-ale cîinelui sînt cît 5 sărituri de-ale iepurelui, înseamnă că o săritură de-a cîinelui este cît $\frac{5}{3}$ sărituri de-ale iepurelui. Atunci 7 sărituri de-ale cîinelui fac cît $7 \times \frac{5}{3}$ sărituri de-ale iepurelui. Pentru un singur set de sărituri cîinele se apropie de iepure cu $\frac{35}{3} - 9 = \frac{8}{3}$ sărituri de-ale iepurelui. Diferența între cei doi fiind de 40 sărituri

de-ale iepurelui, atunci $40 : \frac{8}{8} = 15$ (seturi de sărituri).

Numărul de sărituri va fi $15 \times 7 = 105$.

R 105

5. Din două localități A și B pornesc unul spre celălalt doi călători cu aceeași viteză de 4 km/h. La întîlnire, cel care a plecat din B îl întreabă pe celălalt cît mai are de parcurs, la care acesta răspunde : „Dacă ne-am fi întîlnit cu $\frac{1}{2}$ oră mai devreme, distanța parcursă de tine ar fi fost de două ori mai mică decît cea pe care aș fi parcurs-o eu. ; dacă ne-am întîlnit peste $\frac{1}{4}$ oră, aș fi avut parcursă o distanță de 8 ori mai mare decît cea parcursă de tine".

Știind că primul a plecat la ora 7, să se afle cît a parcurs fiecare pînă la locul de întîlnire și la ce oră a plecat din B.

Iuliu — Ioan Benyi — G.M. nr. 4/1988

Soluție : Dacă s-ar fi întîlnit cu $\frac{1}{2}$ oră mai devreme, călătorul plecat din A ar fi făcut $\frac{2}{8}$ din drum, iar cel din B numai $\frac{1}{8}$ din drum, ca în figura 1

Dacă s-ar fi întîlnit peste $\frac{1}{4}$ din oră, călătorul din A ar fi parcurs $\frac{3}{4}$ din drum, iar cel din B numai $\frac{1}{4}$ din drum, ca în figura :

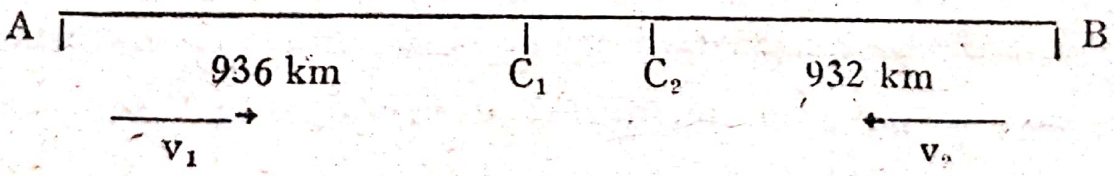
Diferența dintre $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$ reprezintă $\frac{1}{2}$ oră + $\frac{1}{4}$ oră, adică $\frac{1}{12}$ din drum reprezintă $\frac{3}{4}$ de oră; atunci distanța corespunzătoare lui $\frac{1}{12}$ din drum ar fi $\frac{3}{4}$h × 4 km/h = 3 km, deci tot drumul ar avea 3 km : $\frac{1}{12}$ = 3 km 12 = 36 km.

Călătorul din A, pînă la întîlnire, a parcurs $\frac{2}{3}$ · 36 km = = 24 km și încă 4 km/h · $\frac{1}{2}$ h = 2 km, deci în total 26 km, iar călătorul din B a parcurs 36 — 26 = 10 (km). Atunci, al doilea călător, mergînd și el cu 4km/h, a avut nevoie de 10 km : : 4 km/h = $2\frac{1}{2}$ h; deci a avut loc la orele $7 + 6\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$, iar călătorul din B a plecat la orele 11

6. Două avioane, care decolează simultan din două orașe diferite A și B, pornesc unul către celălalt cu viteze constante, dar diferite între ele. Parcurgînd distanța AB în linie dreaptă, se întîlnesc în dreptul unui punct situat la 936 km de orașul cel mai apropiat. Ajungînd la destinație, staționează o oră, după care efectuează cursa retur cu aceleași viteze. Știind că se reîntîlnesc la distanța de 932 km față de celălalt oraș, care e distanța dintre cele două orașe?

C. D. Mituțoiu — G.M. nr. 5/1977

Soluție:



Notăm cu v_1 viteza avionului ce pleacă din A, cu v_2 viteza avionului ce pleacă din B și cu d distanța AB, cu t timpul de la plecare pînă la prima întîlnire în C_1 și cu t_2 timpul de la plecare pînă la a doua întîlnire, în C_2. Avem relațiile:

Pentru prima întîlnire:

$936 = v_1 \cdot t$

$d - 936 = v_2 \cdot t$, de unde, prin adunare, $d = (v_1 + v_2)t$ (1)

Analog pentru a doua întîlnire:

$d + 932 = v_1 \cdot t'$,

$d + d - 932 = v_2 \cdot t'$, de unde, prin adunare,

$3d = (v_1 + v_2) \cdot t'$ (2)

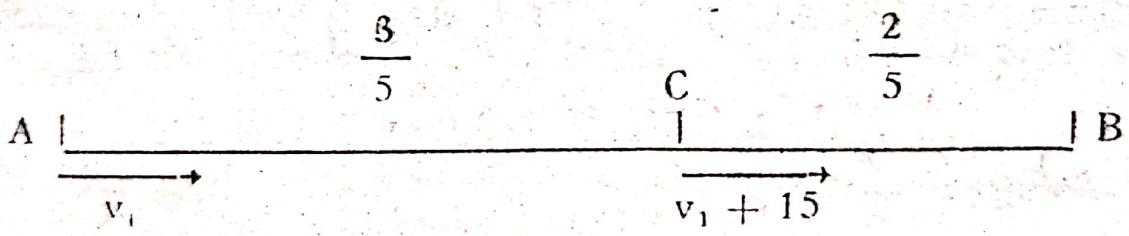
Prin împărțire se obține $t' = 3t$. Deoarece timpul în al doilea caz este mai mare de 3 ori, rezultă că $936 = v_1 t$ și $d + 932 = v_1 \cdot 3t$. Împărțind aceste două relații, obținem:

$$\frac{d + 932}{936} = \frac{v_1 \cdot 3t}{v_1 t} \text{ sau } \frac{d + 932}{936} = 3 \text{ sau } d = 1\,876 \text{ km}$$

7. O mașină trebuie să parcurgă distanța dintre două localități în 4 ore. După ce parcurge $\frac{3}{5}$ din această distanță, mașina este oprită pentru 20 de minute din cauza unor defecțiuni. Șoferul continuă apoi cursa și, mărind viteza cu 15km/h, reușește să parcurgă întreaga distanță în 4 ore. Să se afle distanța dintre cele două localități și viteza medie a mașinii, înainte de oprire și după oprire.

Alexa Dumitrescu — G.M. nr. 1/1977

Soluție.



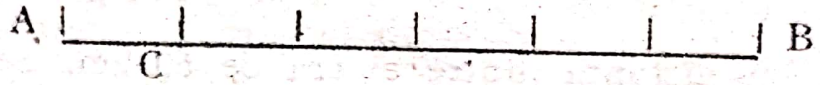
Notăm $AB = d$ și viteza de la plecarea din A cu v_1. Atunci, $d = v_1 \cdot 4$, conform planificării, sau $d = v_1 \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} + (v_1 + 15)\left(4 \cdot \frac{2}{5} - \frac{20}{60}\right)$, conform realității.

Din cele două relații se obține: $v_1 = 57$ km/h; $d = 228$ km

8. Un pieton pleacă din localitatea A spre localitatea B. Cînd ajunge în punctul C (care este în linie dreaptă cu A și B),

unde se oprește el parcursese deja $\frac{1}{5}$ din cea ce îi mai rămăsese pînă în B, în timp de $\frac{2}{3}$ ore. Dacă ar pleca din C, ca să ajungă în B ar trebui să-și mărească viteza cu 3 km/h ca să parcurgă restul drumului în 1 $\frac{2}{6}$ ore. Care este distanța dintre localitățile A și B?

Iulian Micu — G.M. nr. 7/1978

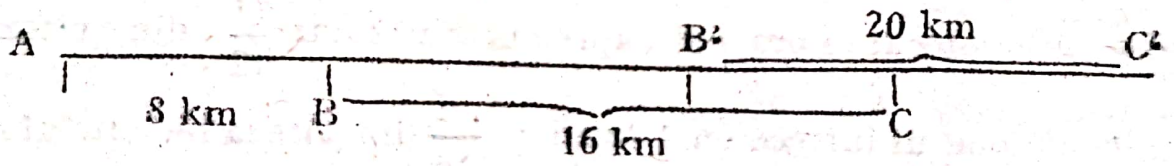


R: d = 12 km

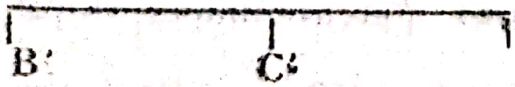
9. Dintr-un sat pornesc la ora 7, pe aceeași șosea și în același sens, un pieton cu viteza de 4 km/h și un biciclist cu viteza de 12 km/h. După ei pleacă la ora 9 un tractor care ajunge pietonul în momentul cînd acesta era cu 20 km în urma bicicletului. La ce oră tractoristul va ajunge biciclistul?

Gh. Bostan — G.M. nr. 2/1976

Soluție:



După 2 ore, diferența dintre biciclist și pieton era de 16 km; deci, pentru ca diferența dintre ei să fie de 20 km, mai trebuie să treacă încă $\frac{1}{2}$ oră, adică la ora 9 $\frac{1}{2}$. Înseamnă că tractorul, care a plecat la ora 9, într-o jumătate de oră a parcurs distanța $AB' = 10$ km ($AB' = 4$ km/h $\cdot 2\frac{1}{2}$ h). Viteza tractorului este de 20 km/h.



$t_1 = \frac{BC}{v_1 - v_2} = \frac{20}{20 - 12} = 2\frac{1}{2}$ h

$\overrightarrow{v_1} = 20$ km/h $\quad \overrightarrow{v_2} = 12$ km/h

Timpul făcut de tractor de la plecare pînă ce ajunge bicicl istul va fi $\frac{1}{2}$ h + 2 $\frac{1}{2}$ h = 3h, adică biciclistul este ajuns la ora 12.

10. Pe autostrada dintre două orașe, la aceeași oră, pornesc simultan unul către altul doi motocicliști. După 2 ore și 40 minute de la plecare primul motociclist parcurge $\frac{7}{10}$ din drum, al doilea $\frac{3}{5}$, iar distanța dintre ei era de 60 km. Se cere :

a) distanța dintre cele două orașe ;
b) distanța parcursă de fiecare motociclist ;
c) vitezele motocicliștilor

R : a) 200 km ; b) 140 km ; 120 km ; c) 52,5 km/h ; 45 km/h

11. Dintr-o localitate au plecat la interval de o oră, pe rînd, un pieton, un biciclist și un autocamion, ajungînd la aceeași destinație, tot la interval de o oră, dar în ordine inversă. Dacă pietonul a plecat la ora 7 și a ajuns la ora 12, iar $\frac{1}{12}$ din viteza autocamionului întrece cu 1 km/h ; $\frac{1}{16}$ din viteza biciclistului, să se afle cu ce viteză a mers fiecare și distanța dintre localități

T. I. Băețică — G.M. nr. 8/1981

R : $\frac{16}{5}$ km/h ; $\frac{16}{3}$ km/h ; 16 km/h și d = 16 km

12. Un biciclist are de parcurs un drum. La jumătatea drumului constată că a pierdut portmoneul și se întoarce să-l caute ; îl găsește la jumătatea drumului parcurs înapoi, după care pornește iar la drum, și după ce mai parcurge $\frac{5}{8}$ din drum constată că mai are pînă la destinație 2 km.

Se cere :

1) lungimea drumului;
2) la ce distanță de la plecare a pierdut portmoneul?

D. Uncu — G.M. E. 7150

R: distanța totală — 16 km; la kilometrul 4

13. Pentru a parcurge distanța dintre două localități în 8 ore și $\frac{2}{5}$ oră, un autoturism trebuie să meargă cu o viteză medie de 65 km/h. După 1 $\frac{3}{5}$ ore are o pană și întîrzie 12 minute. Să se calculeze cu ce viteză medie trebuie să meargă pentru a ajunge în timpul stabilit.

Ionel Vărzaru — G.M. nr. 7/1983

R: $73\frac{1}{8}$ km/h

14. Două automobile pleacă simultan din același loc cu viteze constante astfel încît distanța dintre ele crește cu cîte 4 metri la fiecare 5 secunde. Să se determine:

a) timpul cît a durat mișcarea dacă cele două automobile se opresc atunci cînd distanța dintre ele este de 3 km;

b) distanța dintre cele două automobile după două ore și 45 secunde.

Aurel Ene — G.M. nr. 7/1985

R: a) $62\frac{1}{2}$ minute; b) 5 796 m

15. Un autocamion, plecînd de pe șantier, transportă piatră de la o carieră în 5 ore. Cît de departe este cariera, știind că autocamionul gol merge cu 60 km/h, iar cu încărcătură face 40 km/h?

Gabriel Rusu — G.M. nr. 6/1979

R: 120 km

16. Deplasîndu-se cu o viteză constantă, un mobil parcurge distanța dintre două puncte într-un anumit timp. Dacă mobilul își dublează viteza, atunci timpul se reduce cu 45 minute,

iar dacă viteza se reduce la jumătate, atunci timpul de parcurs se mărește cu o oră și jumătate. Să se afle timpul necesar pentru parcurgerea distanței respective.

Elena B. Ionescu — G.M. nr. 8/1979
R: 1 oră și jumătate

17. Un om a parcurs distanța între două sate cu viteza de 6 km/h; la întoarcere a mers cu viteza de 8 km/h.
Care a fost viteza medie?

Gavril Rus — G.M. nr. 9/1977
R: 4 km/h

18. Un automobil, avînd în rezervor 50 litri de benzină, parcurge distanța de 425 km consumînd 7 litri de benzină la suta de kilometri. După parcurgerea acestei distanțe, șoferul alimentează mașina cu încă 20 litri de benzină și își continuă drumul, avînd același consum. Cîți kilometri mai poate parcurge autoturismul pînă la consumarea totală a benzinei din rezervor?

Gabriela Burtan — G.M. nr. 11—12/1986
R: 575 km

19. După ce a parcurs 78 km și încă o jumătate din drumul rămas, un automobilist constată că mai are de parcurs $\frac{2}{5}$ din spațiul total ce și l-a propus. Cîți kilometri a parcurs în total?

Daniela și Florian Berechet — G.M. nr. 5/1986
R: 390 km

20. Un camion parcurge distanța de 188 km în 4 ore. O parte din drum merge cu viteza de 42 km/h, iar a doua parte din drum cu viteza de 50 km/h. Ce distanță a parcurs cu prima viteză? Dar cu a doua?

Traieniță Hangeriuc — G.M. nr. 10/1977
R: 63 km; 125 km

21. Un tren lung de 35 decametri intră pe podul de la Cernavodă cu viteza de 600 m pe minut. După 7 minute iese de pe pod. Ce lungime are podul de la Cernavodă?

St. Smărăndoiu — G.M. nr. 6/1984
R: 850 m

Scanned with OKEN Scanner

E. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Să se afle un număr știind că înmulțindu-l cu $\frac{7}{10}$ obținem același rezultat ca atunci cînd scădem 60 din el.

Alice Vrăcuți — G.M. nr. 11/1982

2. Să se afle 3 numere naturale știind că : produsul primelor două este 84, produsul ultimelor două este 192, iar suma dintre primul și ultimul este 46.

Ionel Manta — G.M. nr. 7/1980

3. Suma a două numere este $\frac{5}{3}$ din numărul mai mare. Să se afle cele două numere știind că suma lor este mai mare ca diferența lor cu 48.

D. Panait — G.M. nr. 2 — 3/1982

4. Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ știind că sînt verificate simultan egalitățile : $a + b + c = 18$; $a + b + d = 17$; $b + c + d = 24$.

Edmond Sabin — G.M. nr. 11—12/1987

5. Un număr este cu 36 mai mare decît altul. Împărțind suma numerelor la diferența lor obținem cîtul 35 și restul 34. Să se afle numerele.

Damian Marinescu — G.M. nr. 10/1981

6. Să se determine numerele naturale a și b știind că $a + b = 168$, iar restul împărțirii lui a prin b este 7.

St. Smarandache — G.M. nr. 10/1981

7. Un sfert din numărul fetelor este egal cu $\frac{2}{5}$ din numărul băieților aceleiași clase, clasă care totalizează 39 de elevi. Diferența dintre numărul fetelor și cel al băieților este mai mare cu 1 decît a treia parte din numărul total al abonamentelor făcute la „Gazeta Matematică" pe anul 1985 de către elevii cercului de matematică din școala noastră. Despre cîte abonamente la „Gazeta Matematică" este vorba?

x x x — G.M. nr. 2/1987

8. Ana are 3 frați. Produsul vîrstelor celor 3 frați este 144, iar suma vîrstelor este mai mică decît 19. Ce vîrstă au frații Anei știind că între ei nu există gemeni?

x x x — G.M. nr. 8/1973

9. Suma a 3 numere naturale este 1 229. Al doilea este de două ori mai mare decît primul și cu 14 mai mic decît al treilea. Să se afle numerele.

I.C. Ligor — G.M. nr. 8/1984

10. În două bidoane A și B de aceeași capacitate se găsește lapte. În bidonul A lipsesc $\frac{4}{5}$ din capacitatea sa, iar din bidonul B ar mai trebui 4 litri ca să se umple. Turnăm lapte din bidonul B în bidonul A cu 2 litri mai mult decît jumătatea cantității existente în A. Știind că după această operație mai rămîn 28 litri în plus în B față de cantitatea realizată în A, să se afle cantitatea de lapte din ele.

I. Albescu — G.M. nr. 9/1977

11. Suma a 3 numere este 60. Dacă înmulțim al doilea număr cu $\frac{5}{4}$ obținem același rezultat ca atunci cînd îi adăugăm 5. Știind că al treilea număr este cu 6 mai mare decît primul, să se afle numerele.

Dan Gh. Sorin — G.M. nr. 4—5/1984

Scanned with OKEN Scanner

12. Cei patru colegi — Alina, Barbu, Corina, Dan — discută despre notele obținute la lucrarea de control. Iată discuția lor: Ana: „Dacă nu greșeam ordinea operațiilor, luam cît Barbu, așa, însă, mi-a scăzut un punct". Barbu: „Toți am obținut note peste 6, iar nota mea este media notelor voastre". Corina: „Am făcut aceleași greșeli ca și Ana". Dan (cu nota cea mai bună): „De aceea ați fost notate la fel".

Care sînt notele obținute de cei 4 colegi?

Dragomir Costea — G.M. nr. 9/1980

13. Nicușor observă că diferența între numărul lui de telefon și anul instalării acestuia este 55 384, iar cîtul lor 29. Să se afle ce număr de telefon are Nicușor și în ce an a fost instalat postul telefonic.

Traian Militaru — G.M. nr. 8/1980

14. Vlăduț are sarcina de a construi dintr-o bucată de sîrmă un dreptunghi cu baza de 7 cm și înălțimea de 5 cm. El procedează în modul următor: măsoară $\frac{2}{5}$ din lungimea sîrmei ce-o are la dispoziție și adaugă 12 cm. Sîrma astfel obținută se împarte în 6 părți egale. Dintr-o astfel de parte înlătură 2 cm și constată că bucata obținută luată de 4 ori dă chiar perimetrul dreptunghiului cerut. Să se afle lungimea sîrmei inițiale.

Gheorghe Foghiș — G.M. nr. 11/1982

15. Lungimea unei laturi a unui patrulater este $\frac{3}{11}$ din perimetrul său, iar lungimea altei laturi este $\frac{4}{11}$ din perimetru. Calculați perimetrul patrulaterului dacă suma lungimilor acestor două laturi este 28 cm.

x x x — G.M. nr. 6/1987

16. Un elev are o anumită sumă de bani. Dacă ar cheltui prima oară $\frac{3}{5}$ din bani, iar a doua oară $\frac{1}{4}$ din rest, i-ar ră-

mine cu 165 lei mai puțin dacă ar cheltui numai $\frac{1}{5}$ din sumă.

Ce sumă are depusă la C.E.C. elevul?

Gabriela Suciu — G.M. nr. 11/1979

17. Un elev a plătit o excursie $0,(4)$ din $0,4$ din suma pe care o avea la C.E.C. Altă dată a scos $0,(3)$ din $0,3$ din suma rămasă pentru a-și cumpăra un stilou. Știind că la C.E.C. i-au mai rămas cu 296 lei mai mult decît a costat stiloul, să se afle costul excursiei.

Cornel Băețică — G.M. nr. 12/1977

18. Elevii unei școli au plecat într-o excursie de 3 zile, după cum urmează: $\frac{2}{3}$ din totalul elevilor la Sinaia, $\frac{1}{4}$ din totalul elevilor la Predeal, $\frac{1}{10}$ din totalul elevilor la Poiana Brașov, iar restul elevilor la Bran. Să se afle numărul elevilor care au plecat în excursie în fiecare din localitățile arătate, știind că numărul de elevi care au plecat la Predeal este cu 27 mai mic decît numărul de elevi care au plecat la Sinaia.

Ion I. Cioacă — G.M. nr. 11/1977

19. Să se afle consumul zilnic al unei termocentrale știind că primește cantitatea de cărbune în 3 schimburi astfel: în primul schimb $\frac{4}{7}$ din necesarul de cărbune, în schimbul trei $\frac{8}{8}$, iar diferența acestor cantități este cu 125 tone mai mică decît $\frac{1}{5}$ din întreaga cantitate. Să se afle cantitățile de cărbune primite la fiecare schimb.

Tatiana Alexandrescu — G.M. nr. 6/1986

20. Într-o cutie sînt bile albe, roșii și negre. Numeric, bilele albe reprezintă $\frac{8}{15}$ din cele roșii, iar cele roșii $\frac{15}{22}$ din cele ne-

gre. Să se afle cîte bile din fiecare fel au fost, știind că numărul total de bile este de forma $\overline{aba}$, ($a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$).

Vasile Albu — G.M. nr. 2/1984

21. Fie un număr de 4 cifre în care suma lor este 12. Prima cifră este egală cu ultima, a doua este cu un număr mai mare decît ultima, a treia este egală cu suma primelor două cifre. Să se determine numărul, știind că nici o cifră nu este egală cu zero.

R. Cornea — G.M. nr. 9/1980

22. Suma a 7 numere întregi consecutive mărită cu 8 este un număr prim de două cifre. Dacă din acest număr prim scădem 6, obținem un multiplu de 5. Să se afle cele 7 numere.

Patrik Popescu — Pampu — G.M. nr. 2/1987

23. Aflați data nașterii lui Ionuț dacă el ne spune că : numărul zilei de naștere și răsturnatul acestui număr este prim, iar suma cifrelor sale este un pătrat perfect și el reprezintă numărul lunii în care s-a născut. Anul de naștere este bisect și se divide cu 29 și la suma dintre numărul zilei și numărul lunii de naștere.

D. Săvulescu — G.M. nr. 9/1983

24. În 1982 nepoata relatează următoarele : În 1990 bunicul va avea dublul vîrstei tatălui meu. În 1985 tatăl meu va avea de 4 ori vîrsta fratelui meu. Se cer vîrstele bunicului, tatălui și nepotului în anii 1982, 1985, 1987 și 1990, știind că nepotul împlinește 12 ani în 1987.

Adelaida Bogoș — G.M. nr. 12/1982

25. Fiind întrebat (în anul 1987) cîți ani are, un elev a răspuns : „În anul 1997 voi avea vîrsta egală cu suma cifrelor anului în care m-am născut". Cîți ani are elevul?

Concursul „Traian Lalescu" — G.M. nr. 9/1987

R : anul nașterii 1975, iar în 1997 are 22 ani.

26. Într-un bazin cu capacitatea de 100 dal sînt 0,9 kl ulei. Știind că din bazin s-a luat $\frac{1}{3}$ din cantitate și apoi s-a adăugat $\frac{1}{4}$ din rest, să se afle cîți litri mai încap în bazin.

Camelia Barbu — G.M. nr. 4/1985

27. Suma de 800 lei este plătită cu 65 de monede și bancnote de 5 lei, 10 lei și de 25 lei. Știind că numărul bancnotelor de 25 lei este cu 5 mai mare decît numărul bancnotelor de 10 lei, să se determine numărul monedelor și al bancnotelor de fiecare fel.

Violeta Baltă — G.M. nr. 9/1977

28. În anul 1947 un cetățean are vîrsta egală cu suma cifrelor anului nașterii sale. Cîți ani are astăzi și în ce an s-a născut?

N. Radu — G.M. nr. 6/1983

29. Clasa a V-a a unei școli a participat la un concurs: 14 elevi din clasă au cîntat în cor, 12 elevi au recitat poezii, 15 elevi au jucat într-o piesă de teatru și 4 elevi au lipsit din cauză de boală. Cîți elevi sînt în clasă dacă 3 elevi au participat la toate cele 3 formații, iar cîte doi elevi au participat la cîte două formații?

V. Bartha — G.M. nr. 8/1977

30. Ionel, Dan, Cătălin și Radu sînt înscriși la cercurile de radio, navomodele, carting și foto. Știm că Ionel nu este înscris la cercul de radio și nici la cercul foto. Radu afirmă că lui îi plac cartingul și radiofonia, dar nu a putut merge decît la un cerc. Dan spune lui Cătălin: „Pentru a-mi face singur un album fotografic, în anul viitor mă voi înscrie la cercul „foto", mai ales dacă nu voi obține nici un premiu cu modelul meu de șalupă pe care îl lucrez la cerc". Să se stabilească la ce cerc este înscris fiecare din elevi.

D. Săvulescu — G.M. nr. 9/1979

Scanned with OKEN Scanner

31. Într-o zi toți elevii unei clase au răspuns la lecții astfel: 28 la matematică, 23 la gramatică și 18 la istorie. Dintre aceștia, 18 au răspuns și la matematică și la gramatică, iar 15 au răspuns și la gramatică și la istorie. Aflați:

— cîți elevi au răspuns numai la matematică;
— cîți elevi au răspuns numai la gramatică;
— cîți elevi au răspuns numai la istorie;
— cîți elevi au răspuns la cele 3 obiecte.

I. Rîșnicu — G.M. nr. 11—12/1987

32. La o fabrică de ciment s-au încărcat într-o anumită perioadă vagoane de 15 t și de 40 t. Dacă se încarcă numai vagoane de 15 t, rămîn în depozit 10 740 t. Dacă se încarcă numai vagoane de 40 t, rămîn în depozit 9 880 t.

Încărcînd în același timp și vagoanele de 15 t și cele de 40 t, rămîn în depozit 5 620 t. Să se afle numărul vagoanelor de 15 t și de 40 t, cît și cantitatea totală de ciment din depozit.

I.I. Savu — G.M. nr. 12/1979

33. În 3 vase sînt tot atîția litri, hectolitri și, respectiv, kilolitri de lichid. Cîți litri de lichid sînt în fiecare vas dacă în total sînt 1 321,2 dal?

Olimpia Popescu — G.M. nr. 6/1983

34. Într-o urnă se află 6 bile albe, 9 bile galbene, 12 bile roșii și 15 bile verzi.

1) Să se afle numărul minim de bile ce trebuie extrase pentru a fi siguri că am scos:
a) cel puțin 5 bile galbene;
b) cel puțin 4 bile de aceeași culoare.

2) Să se afle numărul maxim de bile ce trebuie extrase pentru a fi siguri că rămîn în urnă:
a) cel puțin 3 bile de aceeași culoare;
b) cel puțin 5 bile roșii.

Mihail Cristian Dinu — G.M. nr. 4/1980

Scanned with OKEN Scanner

35. Într-o urnă se găsesc 60 bile roșii, albe, galbene. Probabilitatea de a extrage la întîmplare o bilă roșie este $\frac{1}{3}$, iar numerele bilelor albe și galbene sînt proporționale cu numerele 2 și 3. Să se calculeze probabilitatea ca extrăgînd la întîmplare o bilă:

a) bila să nu fie roșie;

b) bila să fie roșie sau albă sau galbenă.

C. Joița și N. Joița — G.M. nr. 4/1986

36. Într-o urnă sînt 67 de bile albe și roșii, unele mici, altele mari, despre care știm că:

a) numărul bilelor roșii mari este egal cu numărul bilelor albe;

b) numărul bilelor roșii este divizibil cu 5;

c) bilele albe mici sînt cele mai puține;

d) numărul bilelor de fiecare fel este număr prim.

Să se afle cîte bile de fiecare fel sînt în urnă.

V. Negoiță — G.M. nr. 2/1980

37. Într-o urnă sînt bile albe de cîte 11 grame fiecare și bile roșii de cîte 12 grame fiecare, cîntărind în total 151 grame.

a) Cîte bile trebuie să se extragă minim, fără a vedea culoarea, pentru a fi siguri că am extras culori diferite?

b) Cîte bile trebuie să se extragă minim pentru a rămîne în urnă bile de culori diferite?

Vasile Tucă — G.M. nr. 2/1983

38. Dacă se plătește o sumă de bani în monede de 3 lei, trebuie să dăm monede în plus față de cazul cînd se plătește aceeași sumă în monede de 5 lei. Să se afle suma de bani ce trebuie plătită.

Gh. Nedelea — G.M. nr. 2/1986

39. O sumă de bani, între 500 lei și 600 lei, a fost plătită în bancnote de 10 lei și 25 lei. Știind că raportul bancnotelor de

25 lei este $\frac{8}{4}$, să se afle : suma de bani, numărul bancnotelor de 10 lei și numărul bancnotelor de 25 lei.

Mariana Toader — G.M. nr. 6/1984

40. Ionică are 62 lei în monede de 1 leu, 8 lei și 5 lei. Știind că are de două ori mai multe monede de 8 lei decît de 5 lei și că numărul monedelor de 8 lei este cu 8 mai mare decît al celor de 1 leu, să se afle cîte monede de fiecare fel are.

Stela Tomulescu — G.M. nr. 5/1982

41. Avînd la dispoziție 3 vase, unul de 9 l, unul de 6 l și unul de 100 l, și folosind numai aceste 3 vase, să se determine pe rînd următoarele cantități de lichid : de 5 l, de 17 l și de 20 l.

Adrian Stancu — G.M. nr. 5/1979

42. Un vas de 12 litri este plin cu apă. Să se pună 4 l din această cantitate într-un vas de 7litri cu ajutorul unui vas de 5 litri.

I. Linteș — S.G.M.E. 420

43. Să se arate cum putem măsura 10 litri de apă avînd la dispoziție un vas de 13 litri și un vas de 4 litri.

Petre Țelinoiu

44. Să se arate cum putem măsura 5 litri de apă avînd la dispoziție un vas de 11 litri și un vas de 4 litri.

Petre Țelinoiu

45. Dacă robinetele A, B și C curg respectiv 2 h, 3 h și 6 h, dau 220 hl de apă ; dacă curg 3 h, 2 h și 6 h sau 210 hl de apă și dacă ele curg 2 h, 2 h și 3 h dau 145 hl de apă.

Se cere debitul în hl/h al fiecărui robinet.

Maria Enescu — G.M. nr. 3/1978

Scanned with OKEN Scanner

46. Pentru 10 probleme bine rezolvate și 6 probleme greșit rezolvate, un elev obține 41 puncte. Un alt elev obține 24 puncte pentru 6 probleme bine rezolvate și 2 greșite. Cîte puncte se vor acorda pentru 8 probleme bine rezolvate și o problemă greșită?

Camelia Lazăr — G.M. nr. 1/1977

47. Este posibil ca folosind o balanță și o masă marcată de 100 g să se extragă numai prin două folosiri ale balanței 675 g din 6 kg?

I.N. Ciorbă — G.M. nr. 11/1981

48. La meciul de handbal între echipele claselor a VI-a A și a VI-a B, în prima repriză s-au marcat 18 goluri, raportul dintre golurile marcate de cei din A și B fiind $\frac{5}{4}$. Care a fost scorul final al meciului dacă în repriza a II-a cei din A au marcat, în medie, la 6 minute 20 secunde cîte un gol, iar cei din B la 2, (857142) minute cîte un gol, repriza avînd 20 minute?

Gh. Stoica — G.M. nr. 4/1978

49. Elevii unei clase, în număr de 30, au participat la un concurs de rezolvări de probleme. Știind că 25 de elevi au rezolvat bine prima problemă, 24 elevi pe a doua, 23 pe a treia și 22 pe a patra, să se arate că există cel puțin patru elevi care au rezolvat bine toate problemele.

Mihai Chiriac — G.M. nr. 7/1983

50. O fermă zootehnică are 2 000 de porci și oi.

a) Cîți porci și cîte oi are ferma respectivă dacă o treime din numărul porcilor este tot atît cît jumătate din numărul oilor?

b) Cîți porci și cîte oi vor fi în această fermă după un an, dacă se știe că de obicei se întîmplă ca:

— $\frac{2}{3}$ din numărul porcilor vor avea în medie cîte 10 purcei;

Scanned with OKEN Scanner

— $\frac{1}{8}$ din numărul oilor vor avea cîte doi miei;

— $\frac{4}{5}$ din numărul oilor vor avea cîte un miel?

Petruța Găzdaru — G.M. nr. 5/1982

51. La finisarea unui bloc lucrează 90 de zugravi repartizați în 4 echipe. Fiecare echipă are de zugrăvit apartamentele de la o scară. Echipa de la scara A termină lucrarea în 10 zile, cea de la scara B în 12 zile, cea de la scara C în 15 zile, cea de la scara D în 20 zile. Să se afle cîți muncitori sînt în fiecare echipă știind că fiecare muncitor a zugrăvit aceeași suprafață.

A. Paraschivescu — G.M. nr. 7/1985

52. Două echipe de muncitori pot termina o lucrare în 16 ore. După ce au lucrat împreună 14 ore, lucrarea a fost terminată numai de una din echipe în 5 ore. În cîte ore poate termina fiecare echipă lucrarea, lucrînd singură?

Mihaela Diaconu — G.M. nr. 11/1984

53. Trei frați, lucrînd împreună, pot executa o lucrare în 4 zile. Primul ar putea executa lucrarea singur în 10 zile, iar al doilea lucrează de două ori mai repede decît al treilea. În cît ar putea fiecare, singur, să termine lucrarea?

x x x — G.M. nr. 7/1978

54. O brigadă de tractoriști are de arat 481 ha, iar altă brigadă 569 ha. După ce ambele brigăzi au lucrat același număr de zile, se constată că prima mai are de arat 31 ha și a doua 23 ha. Știind că ambele brigăzi au lucrat mai mult de 8 zile și că ritmul zilnic de lucru a fost constant pentru fiecare brigadă, să se afle cîte zile lucrează cele două brigăzi.

Ion Voicu — G.M. nr. 11/1977

55. O echipă de tractoriști are de arat o suprafață de 1 800 ha. Dacă fiecare tractorist ară zilnic 15 ha, echipa ar

Scanned with OKEN Scanner

termina arătura în 12 zile. Dar, din prima zi, echipa s-a întărit cu încă 5 tractoriști. În cîte zile va termina arătura noua echipă?

Gabriela Burtan — G.M. nr. 11 — 12/1986

56. Trei muncitori pot termina o lucrare în 8 zile. Cîți muncitori vor termina o lucrare de două ori și jumătate mai mare în 6 zile.

M. Brînză — G.M. nr. 4/1979

57. Într-un tabel sînt scrise primele numere naturale, în rînduri egale, de la stînga la dreapta. Știind că numărul 149 se află pe rîndul de la mijloc, iar în dreptul acestui număr, pe ultimul rînd, se află numărul 290, să se afle cîte numere sînt în tabel.

C. Apostol — G.M. nr. 10/1981

58. La tragerea într-o țintă se socotesc 4 puncte pentru o lovitură în primul cerc (cel din centru), 3 puncte pentru o lovitură în al doilea cerc și 2 puncte pentru o lovitură în al treilea cerc. O grupă de 15 elevi, trăgînd cîte 20 lovituri fiecare, obține 75 lovituri în cercul al doilea, 40 lovituri nu nimeresc ținta, iar celelalte nimeresc în primul cerc și în al treilea. Dacă întreaga grupă a obținut 705 puncte, să se determine cîte lovituri s-au obținut în primul cerc și cîte în al treilea cerc.

Violeta Baltă — G.M. nr. 3/1979

59. Să se afle de cîte ori se folosește fiecare dintre cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în scrierea tuturor numerelor naturale cuprinse între 1 și 100. Aceeași problemă pentru numerele naturale cuprinse între 1 și 200.

E. Rogai — G.M. nr. 1/1980

60. Știind că x și y sînt numere întregi, să se afle ce număr se află pe locul 19 877 dacă : primul număr este egal cu x, al doilea număr este egal cu x + y, al treilea număr este egal cu diferența dintre al doilea și primul număr, al patrulea este egal cu diferența dintre al treilea și al doilea, etc.

Ruxandra Ionescu — G.M. nr. 11/1982

Scanned with OKEN Scanner

61. Cele 5 cifre ale unui număr de telefon din Baia Mare îndeplinesc simultan următoarele condiții :

a) prima cifră este un sfert din cifra a doua ;

b) cifra a doua este egală cu cifra a cincea ;

c) cifra a treia este produsul dintre cifra a patra și a cincea.

Care sînt numerele de telefon care îndeplinesc aceste condiții ?

Tudor Rițiu — G.M. nr. 7/1977

62. Să se determine 5 numere N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 știind că sînt îndeplinite simultan următoarele condiții :

a) N_1 este de două ori mai mare decît N_2 ;

b) N_3 este cu 40 mai mic decît N_1 și cu 25 mai mic ca N_2 ;

c) N_4 este de 3 ori mai mare decît N_5 ;

d) suma tuturor numerelor este 987.

N. Dobrițescu — G.M. nr. 12/1985

63. În școala noastră sînt 25 clase. Știind că fiecare clasă are cel puțin 30 elevi și cel mult 35 elevi, să se arate că cel puțin 5 clase au același număr de elevi.

Irina Albu — G.M. nr. 5/1986

64. Într-un vas sînt a litri de lichid. În altul sînt „a" hl.

a) Cîți litri sînt în fiecare vas, dacă în ambele vase sînt, la un loc, 252,5 litri.

b) Dacă în ambele vase sînt la un loc x litri, cu cine trebuie să fie divizibil x astfel ca în primul vas să se afle un număr întreg de litri ?

Olimpia Popescu — G.M. nr. 12/1980

65. O fermă agricolă a repartizat cantitatea de 224,28 hl de îngrășămînt chimic lichid pentru 3 loturi astfel : pentru primul lot $\frac{1}{3}$, pentru al doilea $\frac{1}{4}$ din întreaga cantitate, iar pentru al treilea restul de îngrășămînt. Pentru împărțirea îngrășămîntului s-au folosit vase de aceeași mărime.

Știind că după împărțirea în vase a fiecărei cantități repartizate au rămas respectiv 336 l, 252 l și 63 l, să se afle :

a) ce cantitate s-a repartizat fiecărui lot ;

b) cîți litri au fost în fiecare vas;

c) ce suprafață are fiecare lot pe care s-a împrăștiat îngrășămînt, știind că pentru fiecare hectar s-a folosit cantitatea dintr-un vas.

P. Bîrleanu — G.M. nr. 8/1978

66. Se dă mulțimea A = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}. Scrieți toate perechile de elemente al căror produs este egal cu 36. Alegeți două elemente de mulțimi date, exprimate în unități de lungime, care să reprezinte dimensiunile unui dreptunghi, astfel ca: a) aria să fie maximă; b) perimetrul să fie maxim; c) aria să fie minimă; d) perimetrul să fie minim; e) aria să fie 36 iar perimetrul maxim.

E. Tulba și V. Tulba — G.M. nr. 6/1985

67. În fiecare din clasele a V-a A și a V-a B sînt mai mult de 30 elevi, dar mai puțin de 40. Numărul elevilor plecați în tabere la mare, respectiv la munte, din cele două clase reprezintă $\frac{1}{9}$, respectiv $\frac{3}{4}$ din numărul total de elevi din cele două clase la un loc. Știind că numărul elevilor plecați în tabără la mare din clasa a V-a B reprezintă $\frac{1}{7}$ din numărul elevilor din clasa a V-a A, să se afle:

a) cîți elevi sînt în fiecare clasă;

b) cîți elevi au fost în tabără la mare din fiecare clasă dacă cei plecați din clasa a V-a A reprezintă $\frac{4}{5}$ din cei plecați din clasa a V-a B.

Vasile Albu — G.M. nr. 11/1985

68. Mulțimea $\mathbb{N}^*$ se împarte în grupe astfel: (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ... unde prima grupă formată dintr-un număr, a doua din următoarele două numere etc.

a) Cu ce număr începe grupa 1 987?

b) Cu cît este egală suma numerelor din grupa 1 987?

D. Miheț — G.M. nr. 9/1987

Scanned with OKEN Scanner

69. La un concurs de matematică numărul punctelor acordate se calculează după formula $P = 2r - n + 15$, unde r este numărul problemelor rezolvate corect, iar n numărul problemelor nerezolvate. S-au dat în total 10 probleme.

a) Să se arate că suma punctelor acordate la doi elevi se divide la 3.

b) Este posibil ca un elev să fi realizat 30 de puncte? Dar 35 de puncte?

N. Bata — G.M. nr. 2/1986

70. La un concurs județean de matematică participă 300 de elevi, repartizați în mod egal în 15 săli. Să se afle:

a) cel mai mic număr de fete care ar trebui să participe, știind că, indiferent cum s-ar face repartizarea, în fiecare sală trebuie să fie cel puțin o fată;

b) cel mai mare număr de fete care ar putea să participe, astfel încît, indiferent de modul în care se face repartizarea pe săli, să existe o sală numai cu băieți.

A. Ghioca — Concurs de matematică, 1979

71. Buletinul de identitate al tatălui meu are un număr cu proprietățile:

— este format din 6 cifre diferite de la 0 la 9;

— suma dintre cifra situată pe locul I și cifra situată pe locul al VI-lea dă cifra 9;

— suma dintre cifra situată pe locul al doilea și cifra situată pe locul al cincilea dă cifra 9;

— suma dintre cifra situată pe locul al III-lea și cifra situată pe locul al IV-lea dă cifra 9;

— ultimele două cifre ale numărului de buletin, adunate, dau cifra situată pe locul al doilea;

— suma cifrelor situate pe locurile II și III este un număr egal cu numărul format de cifrele de pe locurile V și VI ale numărului de buletin luate împreună.

Care este numărul de buletin?

Adriana Popa — G.M. nr. 4—5/1984

72. Un cîine de vînătoare și o vulpe se găsesc la o distanță de 30 m unul de celălalt. Știind că vulpea face o săritură de 1 m

Scanned with OKEN Scanner

și cîinele una de 2 m, iar vulpea sare de 6 ori în timp ce cîinele sare de 2 ori, să se afle distanța parcursă de cîine pînă ce ajunge vulpea.

Alexandru Uță — G.M. nr. 1/1984

73. Ionică are 80 pași înaintea lui Petrică, iar Petrică face 9 pași în timp ce Ionică face 10 pași. Să se afle cîți pași va face Petrică pînă îl va ajunge pe Ionică, dacă :

a) 4 pași ai lui Petrică fac cît 5 pași ai lui Ionică ;
b) 4,5 pași ai lui Petrică fac cît 5 pași ai lui Ionică.

Gh. Foghiș — G.M. nr. 11/1982

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul al IX-lea

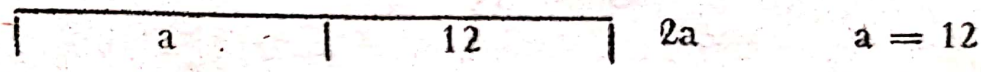
EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

A. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODA FIGURATIVĂ

1. Aflați numărul care adunat cu 12 ne dă dublul său.

Gabriela Enache — G.M. nr. 5/1987

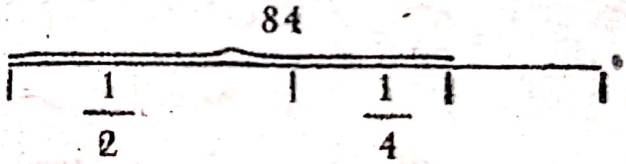
Soluție :



2. Suma dintre jumătatea unui număr și sfertul său este 84. Care este numărul?

x x x — G.M. nr. 9/1986

Soluție :

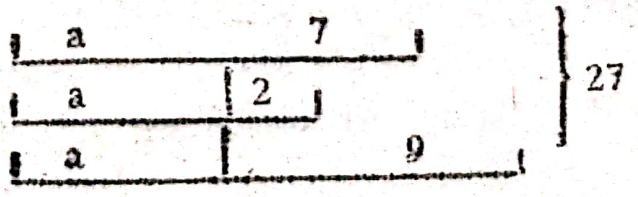


$\frac{3}{4}$ reprezintă 84, deci $\frac{1}{4}$ reprezintă 28, iar $\frac{4}{4}$ reprezintă 112, deci numărul căutat este 112.

3. Suma a 3 numere este 27. Dacă din fiecare se scade același număr se obțin 7; 2 și 9. Care sînt numerele?

x x x — G.M. nr. 11/1985

Soluție :

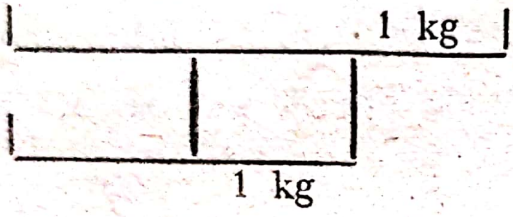


$27 - (7 + 2 + 9) = 9$ Cum cele 8 părți la fel de mari reprezintă 9, atunci una singură reprezintă 8. Deci, numerele sînt 10, 5, 12.

4. În două coșuri sînt cantități diferite de prune. Dacă dintr-unul scoatem 1 kg, atunci cantitățile devin egale și, dacă din celălalt scoatem tot 1 kg, cantitatea din primul coș este de două ori mai mare decît în celălalt. Cîte kilograme sînt în primul coș și cîte în al doilea?

Iulian Moise — G.M. nr. 2/1985

Soluție :

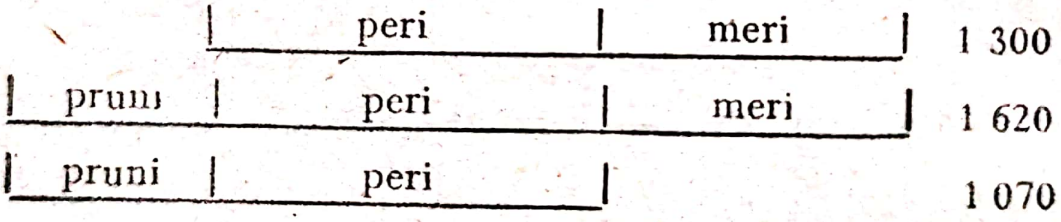


R: 4 kg; 3 kg

5. La o fermă s-au plantat primăvara 2 000 de puieți. Știind că au fost 380 de nuc, 1 300 de meri și peri la un loc și 1070 peri și pruni la un loc, să se afle cîți puieți de meri, cîți de peri și cîți de pruni s-au plantat.

Emil Antonius Zöldeși — G.M. nr. 8/1985

Soluție : Calculăm cîți puieți de meri, pruni și peri sînt în total : $2\,000 - 380 = 1\,620$. Reprezentăm prin segmente mărimile corespunzătoare datelor din problemă :

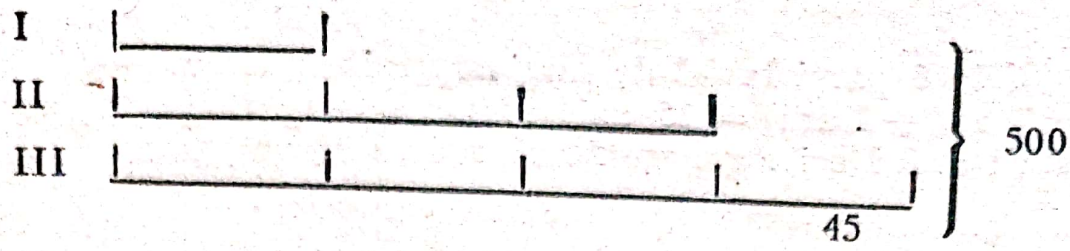


$1\,620 - 1\,300 = 320$ (pruni)
$1\,620 - 1\,070 = 550$ (meri)
$1\,070 - 320 = 750$ (peri)

6. Suma a 3 numere este 500. Al doilea număr este de 8 ori mai mare decît primul număr și cu 45 mai mic decît al treilea număr. Să se afle numerele.

Ovidiu Alexinschi — G.M. nr. 11—12/1986

Scanned with OKEN Scanner



500 — 45 = 455
455 : 7 = 65, deci avem : I — 65 ; II — 195 ; III — 240

7. Într-o livadă sînt 172 pomi fructiferi : meri, peri și nuci. Dacă în livadă ar mai fi 8 nuci, atunci numărul merilor ar fi de două ori mai mare decît numărul nucilor sau jumătate din numărul perilor. Cîți nuci, cîți peri și cîți meri sînt în livadă ?

Gherghina Hrîncescu — G.M. nr. 9/1986

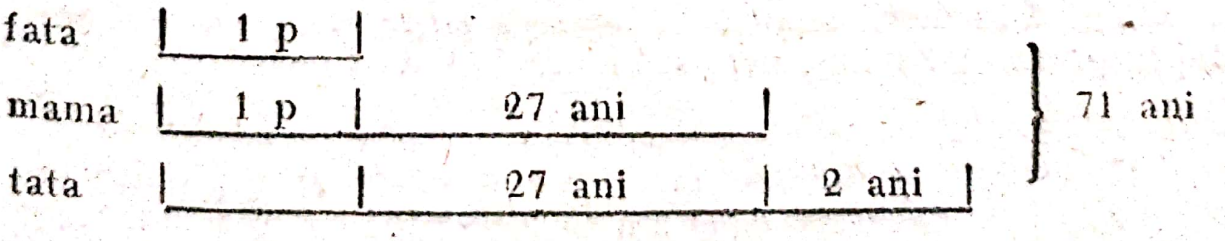
Soluție :

Dacă mai adăugăm 8 nuci la cei 172 pomi, obținem 175 pomi, cu reprezentarea grafică de mai sus. Atunci, avînd 7 părți la fel de mari, o singură parte va reprezenta 175 : 7 = 25 (pomi). 25 — 8 = 22 (nuci) ; 25 × 2 = 50 (meri) ; 25 × 4 = 100 (peri)

8. Suma vîrstelor tatălui, mamei și fiicei este de 71 ani. Peste 2 ani mama va avea vîrsta de acum a tatălui, iar peste 27 ani fetița va avea vîrsta de acum a mamei. Cîți ani are fiecare ?

Valeriu Trufaș — G.M. nr. 7—8/1987

Soluție : Din condițiile problemei putem reprezenta diferențele de vîrste între fiică, mamă și tată.

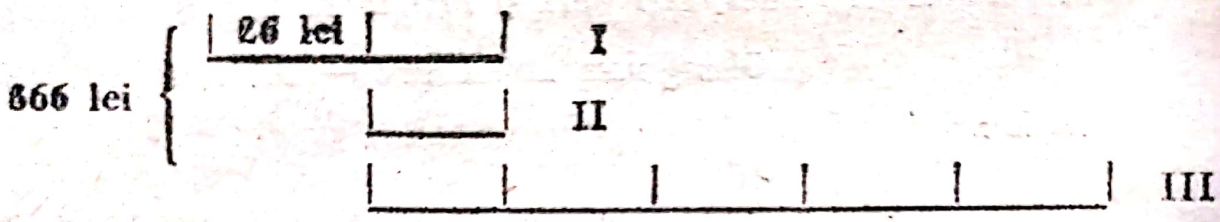


Cele 6 părți la fel de mari reprezintă 71 ani — (27 ani + + 27 ani + 2 ani) = 15 ani, atunci o singură parte va reprezenta 5 ani. Deci, fata are 5 ani, mama 32 ani, tata 34 ani.

9. Trei copii au împreună 366 lei. Primul are cu 16 lei mai mult decît al doilea, iar al doilea are de 5 ori mai puțin decît al treilea. Cîți lei are fiecare copil?

Maria Blaga — G.M. nr. 5/1987

Soluție:

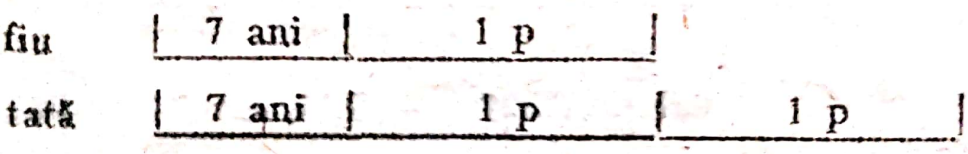


7 părți reprezintă 366 — 16 = 350 (lei)
1 parte reprezintă 50 lei, deci I — 66 lei; II — 50 lei; III — 250 lei

10. Determinați vîrsta în prezent a tatălui unui băiat dacă băiatul are 7 ani, iar atunci cînd băiatul va avea vîrsta tatălui, tatăl va avea 55 ani.

Mariana Bârcă — G.M. nr. 6/1987

Soluție:



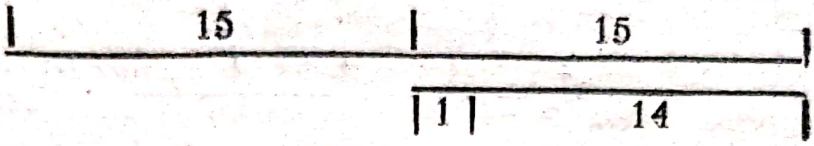
Segmentul punctat, adică 1 p, reprezintă numărul de ani din momentul de față pînă ce băiatul va avea vîrsta actuală a tatălui. Din desen rezultă că 2 p reprezintă 55 — 7 = 48 (ani), 1 p reprezintă 24 ani, deci tata are 7 + 24 = 31 (ani).

11. Ionela, jucîndu-se cu bile, observă că a pierdut din ele. Făcînd un calcul ea constată că a pierdut cu una mai mult

decît jumătate din cîte avea înainte. Să se afle cîte bile a avut Ionela la început, știind că i-au mai rămas 14 bile.

Camelia Fota — G.M. nr. 5/1985

Soluție :

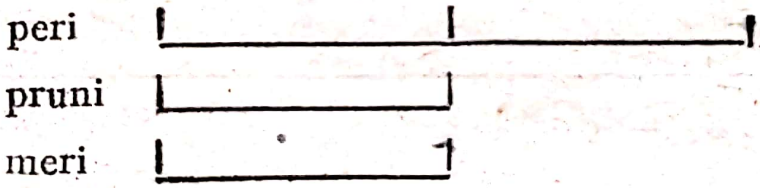


R : La început a avut 60 zile.

12. Într-o grădină nu se pot planta decît cel mult 10 pomi. Un gospodar își propune să cumpere meri de 3 ori mai puțin decît numărul total de peri și pruni, iar peri de două ori mai mult decît pruni. Care este numărul cel mai mare de meri, peri și pruni ce-l poate cumpăra în condițiile date? Dar cel mai mic?

Alexandrina Dumitru — G.M. nr. 7—8/1987

Soluție :

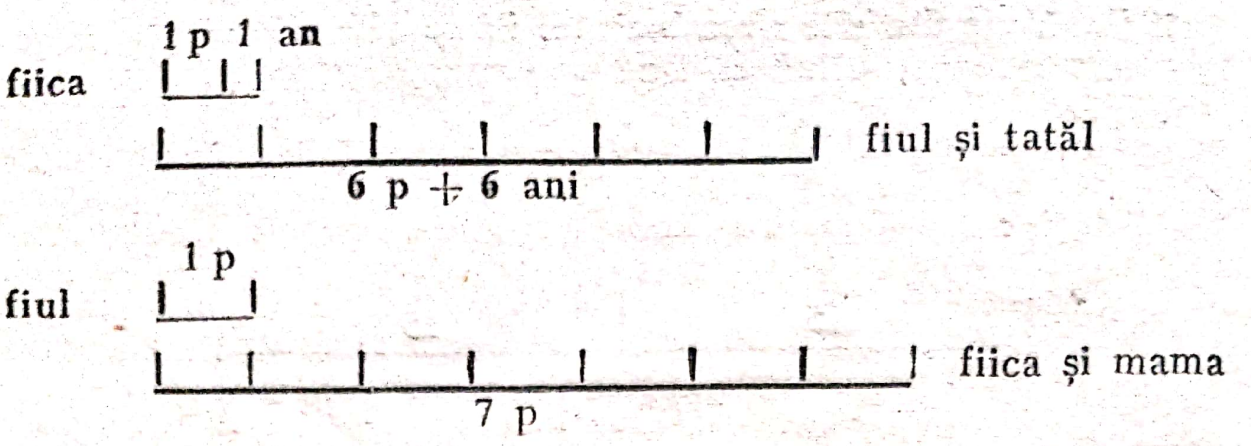


R : 4 peri, 2 pruni, 2 meri sau 2 peri, 1 prun, 1 măr

13. Tatăl, mama, fiul și fiica au împreună 71 ani. Cîți ani are fiecare dintre ei dacă tatăl și fiul au la un loc de 6 ori vîrsta fiicei, iar mama și fiica au împreună de 7 ori vîrsta fiului; fiul este cel mai mic membru al familiei, iar vîrstele fiului și a fiicei sînt reprezentate de două numere naturale consecutive.

Ștefania Nemeș — G.M. nr. 11—12/1986

Soluție : Considerăm vîrsta fiului o parte (1 p). Atunci sora lui va avea 1 p + 1 an. Utilizăm metoda figurativă :



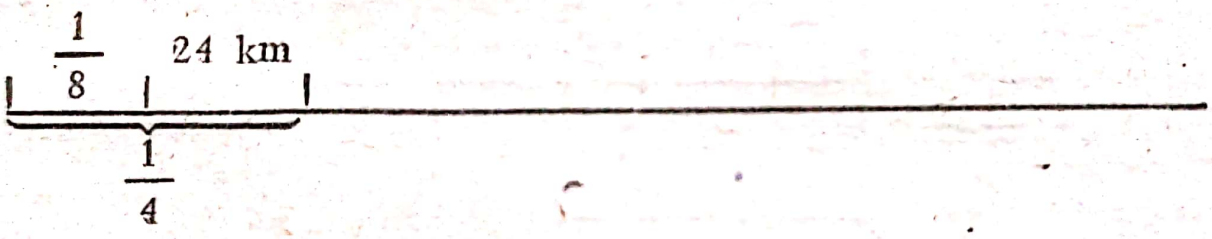
Din desen rezultă că 6 p + 6 ani + 7 p reprezintă 71 ani sau 18 p reprezintă 65 ani, de unde 1 p reprezintă 5 ani.

R: fiul — 5 ani, fiica — 6 ani, mama — 29 ani, tata — 31 ani

14. Un călător parcurge în prima zi $\frac{1}{8}$ dintr-un drum, iar a doua zi 24 km, parcurgînd astfel în cele două zile un sfert din drumul ce-l avea de parcurs. Să se afle lungimea drumului.

Moise Nistor — G.M. nr. 9/1986

Soluție:



24 km reprezintă $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$, adică $\frac{1}{8}$, atunci

$24 \text{ km} : \frac{1}{8} = 24 \text{ km} \cdot 8 = 192 \text{ km}$

15. Găsiți două numere care îndeplinesc simultan condițiile:

a) suma lor este 38;

b) al doilea număr, micșorat cu 5, este egal cu primul număr mărit de două ori.

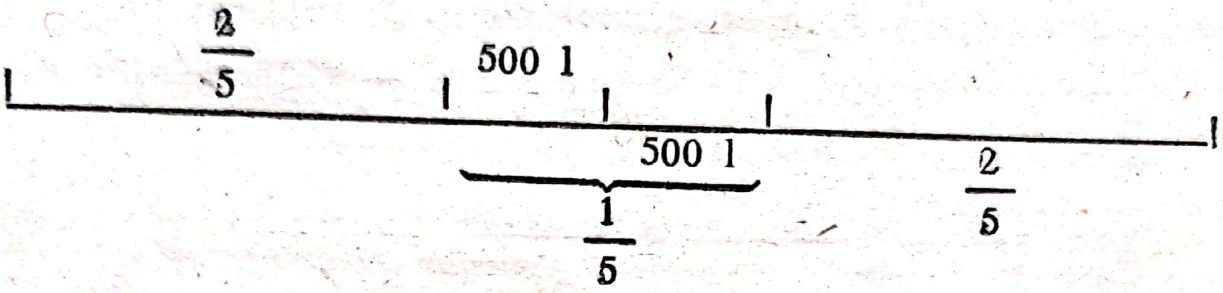
Ioana Melișescu — G.M. nr. 2/1988

R: 11; 27

16. La o stație de benzină se află o cantitate de benzină. Într-o zi s-a vîndut $\frac{2}{5}$ din toată cantitatea plus 500 l, ceea ce reprezintă jumătate din toată cantitatea de benzină. Care a fost cantitatea de benzină care se afla în stația de benzină?

Floare Maria Lazea — G.M. nr. 5—6/1988

Soluție:



$\frac{1}{5}$ reprezintă 1 000 l, atunci stația are 5 000 l.

17. Cîtul a două numere este 5, iar diferența lor este 600. Care sînt numerele?

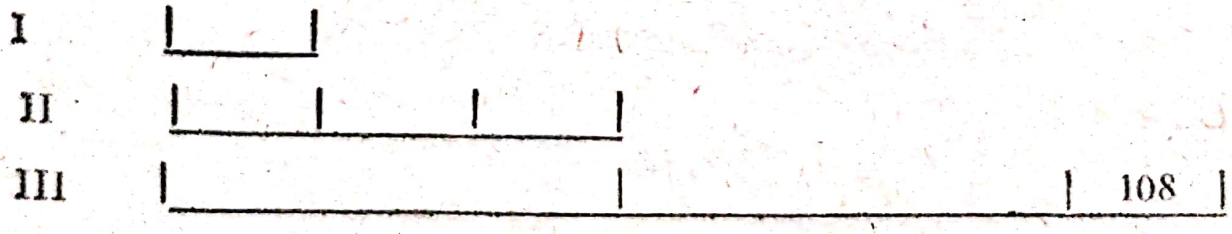
x x x — G.M. nr. 6/1988

R: 150; 750

18. Suma a 3 numere este 1 988. Să se afle numerele știind că, dacă împărțim al doilea număr la primul număr obținem cîtul 3, iar dacă împărțim pe al treilea la al doilea obținem cîtul 2 și restul 108.

Emilia Popescu — G.M. nr. 4/1988

Soluție:



1 988 — 108 = 1 880

1 880 : 10 = 188, atunci I 188, II 564, III 1 236

19. La un magazin de produse lactate s-au adus prima dată 70 dal lapte, a doua oară 850 l lapte, iar a treia oară diferența dintre cantitățile aduse înainte. Întreaga cantitate s-a vîndut în două zile. Să se afle cîți litri de lapte s-au vîndut în fiecare zi, dacă în prima zi s-a vîndut o cantitate de 4 ori mai mare decît în a doua.

M. Georgescu — G.M. nr. 9/1984

20. Găsiți un număr natural x, știind că dacă la dublul său adunăm jumătatea sa, sfertul său și 1, obținem 100.

x x x — G.M. nr. 10/1988

Soluție :

$11a = 99$ $\quad a = 9$, deci numărul va fi 86.

21. La un chioșc sînt 1 505 ziare și reviste. După ce s-au vîndut 101 ziare și 60 reviste, ziarele au rămas de două ori mai multe ca revistele. Cîte reviste și cîte ziare erau la început?

Mihaela Uricaru — G.M. nr. 11—12/1988
R : 538 reviste ; 1 177 ziare

22. Să se afle două numere știind că primul număr este de 5 ori mai mare decît al doilea, iar diferența dintre dublul primului număr și triplul celui de al doilea număr este 245.

N. Popa — G.M. nr. 3/1989
R : 175 ; 35

23. Doi elevi stabilesc cîți lei au depus pentru o excursie astfel :

Părți am două, tu ai trei,
Dar pe toți de i-aș avea
Și-ncă nouăzeci și trei
Total aș realiza

Exact două sute trei.
Și acum, vrei nu vrei,
O firească întrebare !
Cîți lei are fiecare ?

Ionel Roman — G.M. nr. 4/1988

R ! 44 ; 66

24. Găsiți două numere care îndeplinesc simultan condițiile :

a) suma lor este 88 ;

b) al doilea număr micșorat cu 5 este egal cu primul mărit de două ori.

Ioana Merișescu — G.M. nr. 2/1988

R ! 11 ; 27

25. Mihai, Andrei și Ioana au împreună 860 timbre. Dacă Mihai i-ar da lui Andrei 15 timbre și Ioanei 85 timbre, atunci Mihai ar avea de 8 ori mai puține decît Ioana și de două ori mai puține decît Andrei. Cîte timbre a avut fiecare ?

R ! Mihai 110, Ioana 145, Andrei 105

26. Cîtul a două numere este 9. Primul număr mărit cu 87 este de 8 ori mai mare decît al doilea număr mărit cu 5. Să se afle cele două numere naturale.

Georgeta Suditu — G.M. nr. 9/1987

R : 27 ; 8

27. Petrică are de 5 ori mai mulți lei decît Sergiu. Cîți lei are fiecare știind că, dacă Petrică îi dă lui Sergiu 32 lei, sumele lor devin egale.

P. Grăjdeanu — G.M. nr. 4/1986

R : 80 lei ; 16 lei

28. Suma a două numere este mai mare cu 24 decît diferența lor și de 4 ori mai mică decît această diferență. Aflați cele două numere.

I. Rîșnicu — G.M. nr. 11—12/1987

R : 20 ; 12

Scanned with OKEN Scanner

29. Suma a două numere naturale este 8 880. Știind că unul reprezintă anul apariției revistei „Gazeta Matematică", iar celălalt anul în care aniversăm 90 de ani de la acest eveniment, să se afle cele două date importante din viața „Gazetei Matematice".

Șt. Smărăndoiu — G.M. nr. 11/1985

R 1 895 și 1 995

30. Doi copii au împrumutat 60 lei. Dacă primul cheltuiește cît dublul celui de-al doilea și la fiecare rămîn cîte 15 lei, cîți lei a avut fiecare copil la început?

Angela Neța — G.M. nr. 5/1986

R 85; 25

31. Dana are 8 ani, tata este mai în vîrstă decît mama cu 2 ani, iar mama, dacă ar avea cu 1 an mai mult, ar fi de 4 ori mai mare decît Dana. Cîți ani are tata?

M. Dragota — G.M. nr. 9/1984

R 88 ani

32. Cristina și Alina sînt colege de bancă. Cristina zice Alinei: „Dă-mi două creioane colorate de la tine, ca să am și eu cît ai tu". Alina răspunde: „Dă-mi tu două creioane colorate ca să am de două ori mai multe decît ai tu". Cîte creioane colorate are fiecare din cei doi copii?

R. Dincă — G.M. nr. 4/1986

R 14; 10

33. În clasă s-au așezat cîte doi elevi în bancă, dar mai rămîne o bancă liberă. Într-o zi ne-am fotografiat împreună cu doamna învățătoare și ne-am așezat cu toții cîte 8 în bancă. Au mai rămas 6 bănci libere. Cîți elevi și cîte bănci sînt în clasa noastră? Verificare.

Cătălina Monica — G.M. nr. 6/1986

R 16 bănci și 80 elevi

34. Într-o clasă sînt bănci și elevi. La începutul anului școlar învățătorul constată: dacă ar așeza cîte 1 elev în fiecare bancă, ar rămîne 9 elevi fără loc în bancă; dacă ar așeza cîte 2 elevi în bancă ar rămîne 6 bănci goale. Cîți elevi și cîte bănci erau în clasă?

Vasile Neacșu — G.M. nr. 4/1986

Scanned with OKEN Scanner

B. EXERCIȚII ȘI PROBLEME DIVERSE PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Găsiți perechile de numere naturale (a, b) cu $a < b$ pentru care $a \cdot b + 3 = 21$.

Gabriela Simiganaschi — G.M. nr. 5/1987

R: (1, 18); (2, 9); (3, 6)

2. Fără a efectua înmulțirile în scris, să se arate că:
$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5^5 = 12\,000\,000$ și
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5^5 = 126\,000\,000$.

C. Ionescu-Tiu — G.M. nr. 8/1981

3. Fie numerele $a = 9 \times 7 + 7 \times 5 + 5 \times 3 + 3 \times 1$
$b = 9 \times 7 - 7 \times 5 - 5 \times 3 - 3 \times 1$
Cu cît este mai mare $(a + b)$ față de diferența $(a - b)$ a numerelor date?

Ancuța Eugenia Dumitru — G.M. nr. 9/1984

R: 20

4. Să se calculeze:

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{9}{10^7}\right)$$

I. Atanasiu — G.M. nr. 1/1976

R: $\frac{9^2}{10^2} \cdot \frac{12\,345\,679}{10^7} = \frac{10^9 - 1}{10^9}$

5. Determinați numărul „a" din egalitatea:

$(10^4 + 10 \cdot 10 \cdot 10 + 10^2 + 100 : 10 + 1) : a = 1$

G. Cojocaru — G.M. nr. 5—6/1988

Scanned with OKEN Scanner

6. Să se elimine 3 cifre din numărul 3 817 945 astfel încît cu cifrele care rămîn (păstrîndu-se ordinea în care se găsesc) să se formeze cel mai mic număr natural. Dar cel mai mare?

Anemaria Raluca Matiș — G.M. nr. 5—6/1988

7. Să se afle numerele necunoscute x și t din egalitățile

a) $[36 : (24 - x) + 2] : 5 = 7$
b) $t : [(921 - 639) : 6 - 39] = 5$

Ion M. Trică — G.M. nr. 4/1988

8. Care numere cuprinse între 100 și 200 împărțite la 5 dau restul 4?

x x x — G.M. nr. 3/1988

9. Să se afle cu cît este mai mare suma decît diferența dintre cel mai mare număr de 5 cifre distincte și cel mai mic număr de cinci cifre identice.

Camelia Fota — G.M. nr. 6/1987

R: 22 222

10. Suma a 13 numere naturale distincte este 92. Care sînt aceste numere?

Revista Kvant — G.M. nr. 8/1985

R: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14

11. Manualul de Aritmetică din clasa a V-a are 272 pagini. Cîte cifre s-au folosit pentru paginarea lui?

E. Rogay

12. Ce număr trebuie să aibă pagina la care deschidem o carte pentru ca suma numerelor ce reprezintă paginația scrisă pe fiecare pagină răsfoită pînă atunci să fie 190?

R: pagina 19. Folosim egalitatea $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

13. Cîte numere naturale de 3 cifre, în care cifra zecilor este 6, există ? Care este cel mai mic număr ? Dar cel mai mare ?

R : $n = \overline{a6b}$, $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. În total $9 \times 10 = 90$ numere. Cel mai mic 160 și cel mai mare 969.

14. Determinați cifrele, a și b din egalitatea

$$5 + b \cdot 8 = \overline{aa}.$$

Nicoleta Predescu — G.M. nr. 9/1987

R : $a = 7$; $b = 9$

15. Determinați în cîte zerouri se termină produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 25.

x x x — G.M. nr. 10/1986

R : în 6 zerouri

16. Determinați perechile de numere (n, p) care verifică egalitatea $(n + 1) \cdot (p + 4) = 16$

x x x — G.M. nr. 1/1986

R : (0, 12) ; (1, 4) ; (3, 0)

17. Determinați numerele naturale x, y, z astfel încît $x < y < z$ și $xyz = 10\,000$.

x x x — G.M. nr. 9/1987

R : (2, 8, 625) ; (2, 4, 1 250) ; ...

18. Micșorînd cu 10 triplul unui număr natural, obținem un număr mai mare cu 100 decît dublul numărului inițial. Care a fost acest număr ?

Maria Călina — G.M. nr. 11—12/1987

R : n = 110

19. Să se găsească mulțimea S a tuturor numerelor care se pot forma cu 4 cifre distincte de zero și a căror sumă să fie 73 326.

Roxana Mareș — G.M. nr. 10/1980

R : S = 9 163 + 9 167 + 9 168 + 9 162 + 9 172 + 9158 + + 9 158 = 78 826

20. Cîte numere de 4 cifre pot fi scrise cu cifrele 1, 2, 3, 4? Dar cu 1, 2, 3, 4, 5?

N. Ivășchescu — G.M. nr. 9/1979

R: 24; 120

21. Dacă scriem toate numerele de la 1 la 100, de cîte ori folosim cifra 9?

x x x — G.M. nr. 7/1986

R: de 20 ori

22. Să se scrie toate numerele naturale în baza 10 care se pot forma utilizînd cifrele 0, 1, 2 cîte o singură dată.

I. Selaru — G.M. nr. 2/1988

23. Găsiți numerele de două cifre care sînt egale cu dublul sumei cifrelor.

x x x — G.M. nr. 2/1988

R: 18

24. Determinați numărul format din două cifre $\overline{ab}$ știind că $a + \overline{ab} + \overline{ab} = \overline{ba}$.

x x x — G.M. nr. 1/1988

R: 25

25. Determinați numerele de două cifre de forma $\overline{al}$ cu proprietatea că $\overline{ab} + \overline{ba} = 88$.

Gh. Sava — G.M. nr. 9/1986

R: 17, 26, 35, ...

26. Determinați cifrele a, b, c din egalitatea $\overline{aa} + 2b = \overline{ccc}$.

x x x — G.M. nr. 1/1986

R: $99 + 2 \cdot 6 = 111$

Scanned with OKEN Scanner

27. Să se determine un număr de 5 cifre în care cifra sutelor este egală cu cifra zecilor, cifra unităților este cu 2 mai mică decît cifra zecilor, iar suma cifrelor numărului este 25.

Oana Macoviciuc — G.M. nr. 6/1986

R: 997

28. Cîte numere de 3 cifre au proprietatea că sînt egale cu răsturnatele lor?

Andreea Malvina — G.M. nr. 8/1985

R: 101; 111; 121; ... ; 191

. . . . . .

909; 919; 929; ... ; 999 — 90 numere

29. Cu cît trebuie mărită diferența dintre cel mai mare număr de 4 cifre și cel mai mic număr de 3 cifre diferite, pentru a obține un număr de 10 ori mai mic decît 910 000?

Elena Nica — G.M. nr. 11/1984

R: a = 81 103

30. Găsiți 3 numere naturale x, y, z astfel încît $x \cdot y \cdot z = 1\,980$.

x x x — G.M. nr. 10/1987

R: $x = 2^2$; $y = 3^2$; $z = 55$. Mai sînt și alte soluții?

31. Care este deîmpărțitul dacă suma dintre rest și împărțitor este 11, suma dintre cît și împărțitor este 12, iar suma dintre împărțitor, cît și rest este 15?

x x x — G.M. nr. 7—8/1987

R: r = 3; c = 4; I = 8; D = 35

32. Cîtul împărțirii a două numere este 3, iar restul 10. Dacă adunăm deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul obținem 143. Să se afle cele două numere.

F. Sorescu — G.M. nr. 9/1986

R: a = 100; b = 30

33. Determinați toate numerele formate din 6 cifre consecutive care se împart exact la 9.

x x x — G.M. nr. 1/1988

R: 234; 567

34. Să se determine numerele de forma $\overline{acba}$ divizibile cu 45, știind că $a \cdot b = 15$. Este vreunul din aceste numere divizibil cu 7? Dar cu 11?

Gr. Preoteasa — G.M. nr. 12/1982

R: 5 535 și nu este divizibil nici cu 7, nici cu 11.

35. Scrieți cîteva perechi de numere naturale astfel încît produsul lor să fie de 4 ori cîtul, știind că acele două numere se împart exact.

Domnica Preoteasa — G.M. nr. 12/1982

R: (4, 2); (6, 2); (8, 2); ...

36. Să se afle numărul $\overline{abc}$ în baza 10, știind că împărțit la inversul său ne dă 7 290.

Iulian Moise — G.M. nr. 12/1988

R: 270

37. Găsiți două numere care, împărțite, dau cîtul 7 și restul 6 și a căror diferență este egală cu 54.

G. Popescu — G.M. nr. 11—12/1987

R: a = 62; b = 8

38. Diferența a două numere este egală cu 167. Dacă le împărțim obținem cîtul 7 și restul 11. Aflați cele două numere.

Daniela și Florian Berechet — G.M. nr. 5/1986

R: 198; 26

39. Determinați numerele naturale a și b care verifică simultan relațiile $6 \leq 2 \nmid a - b$ și $6 < a < 10$.

Maria Dumitru — G.M. nr. 9/1986

R: a = 7 și $b \in \{0, 1, 2\}$
a = 8 și $b \in \{0, 1, 2, 3\}$
a = 9 și $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Mă gîndesc la un număr. Îl înmulțesc cu 100, îi mai adaug 999 și am obținut cel mai mare număr de 4 cifre. La ce număr m-am gîndit?

C. Comănescu — G.M. nr. 10/1986

R: 90

41. Calculați

a) $2 \cdot \{92 + 8[1\,004 - 4(8 : 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 : 2]\}$

b) $3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 1\,987 - 2 - 4 - 6 - 8 - \ldots - \ldots - 1\,986$

c) Adunați toate numerele de 3 cifre, scrise numai cu aceeași cifră care se repetă.

O. Popescu — G.M. nr. 9/1986

R: a) 15 992; b) 1 984; c) $111 + 222 + \ldots + 999 =$

42. Calculați sumele

$S_1 = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{1986}$

$S_2 = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + \ldots + (-1)^{1986} \cdot 1\,986$

$S_3 = (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 4 + (-1)^3 \cdot 6 + \ldots + \ldots + (-1)^{993} \cdot 1\,986$

Concurs de matematică, cl. a VI-a — G.M. nr. 11—12/1986

R: $S_1 = 0$; $S_2 = 993$; $S_3 = -994$

43. Care este cel mai mic număr și cel mai mare număr de monede de 1 leu și 8 lei cu care se poate plăti orice sumă de bani S, cu $8 < S \leq 100$?

Iulian Micu — G.M. nr. 10/1980

44. Care este cel mai mare număr de caiete ce se poate cumpăra cu 100 lei, de 8 lei și de 5 lei bucata?

C. Iancu — G.M. nr. 9/1978

R: 8 caiete

45. Scrieți mulțimea numerelor naturale ≤ 300 ce pot fi descompuse într-un produs de 3 numere naturale fără soț, distincte și mai mari ca 1 și care nu admit descompuneri în factori mai mari ca 1.

Domnica Preoteasa — G.M. nr. 12/1982

R: $2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 7; 2 \cdot 3 \cdot 11; \ldots; 2 \cdot 3 \cdot 47$
$2 \cdot 5 \cdot 7; 2 \cdot 5 \cdot 11; \ldots; 2 \cdot 5 \cdot 23$
$2 \cdot 7 \cdot 11; 2 \cdot 7 \cdot 13; \ldots; 2 \cdot 7 \cdot 23$
$2 \cdot 11 \cdot 13; 2 \cdot 11 \cdot 17$
$3 \cdot 5 \cdot 7; \ldots; 3 \cdot 5 \cdot 19$

46. La un magazin alimentar s-a adus lapte în bidoane cu capacitatea de 10 litri și 17 litri, în total 223 litri. Cîte bidoane au fost de fiecare fel?

x x x — G.M. nr. 5/1987

R: 7 bidoane de 10 l și 9 bidoane de 17 l.

47. Un elev constată că suma sa de 80 lei este exprimată în monedă de 3 lei și de 5 lei și se întreabă dacă exprimarea este unică.

Concurs de matematică din 7 II 1978

R: 3 lei $\times 20 = 60$ lei și 5 lei $\times 4 = 20$ lei, total 80 lei
3 lei $\times 10 = 30$ lei și 5 lei $\times 10 = 50$ lei; total 80 lei

48. O cofetărie primește într-o zi 12 cutii cu bomboane de aceeași greutate; fiecare bomboană avînd 10 g. Din greșeală, fiecare bomboană dintr-o cutie este mai ușoară cu un gram. Cum descoperim cutia respectivă făcînd o singură cîntărire?

Elena Nica — G.M. nr. 5/1983

49. 1) Să se efectueze

$$10 \cdot [10{,}2 \cdot (2 + 2 \cdot 40{,}35) + 0{,}06]$$

2) Dulgheru, Fieraru, Strungaru sînt numele de familie a 3 muncitori, dar Dulgheru nu este de profesie dulgher, Fieraru nu este fierar, iar Strungaru nu este nici strungar, nici fierar, și totuși unul dintre ei de profesie dulgher, altul fierar și altul strungar. Arătați care este de profesie dulgher, care este fierar și care este strungar.

Concurs de matematică din 28 I 1979

Scanned with OKEN Scanner

50. Ionel cumpără un caiet, o gumă și un creion. Elena cumpără un caiet, 3 gume și 3 creioane, iar Costin 2 caiete, 2 gume și un creion. Ionel plătește 7 lei, Elena 18 lei, iar Costin 16 lei. Aflați prețul fiecărui obiect.

Ana Pop — G.M. nr. 6/1983

R: creionul 1 leu; guma 2 lei; caietul 4 lei

51. O cadă de baie poate fi umplută de un robinet într-un sfert de oră avînd un anumit debit constant pe minut. Dacă se mărește debitul cu 2 litri pe minut, cada poate fi umplută cu 3 minute mai repede. Ce capacitate are cada?

Ion Dica — G.M. nr. 7—8/1987

R: 120 l

52. Ionel și Gigel și-au propus următorul joc: începînd cu prima zi a anului, fiecare să rupă din calendar cîte două și respectiv, 3 file pe zi. În ce date au rupt fiecare ultima zi a calendarului?

T. Dinu — G.M. nr. 9/1984

R: Se vor considera an bisect și an obișnuit.

53. După 82 de ani de la înființarea „Școlii cu ceas", actuala Școală Nr. 1 din Rm. Vîlcea, a fost construită Universitatea din București.

În anul 1982 s-au aniversat 15 decenii de la înființarea amintitei școli. În ce an se vor sărbători 125 ani de la construirea Universității din București?

St. Smărăndoiu — G.M. nr. 6/1984

54. Într-un autobuz se urcă la prima stație un număr de călători. La a doua stație coboară 7 călători și urcă 12, la a treia stație coboară 21 călători și urcă 18, iar la a patra stație coboară 7 călători și urcă 15. În acest moment în autobuz sînt 49 călători. Cîți călători au urcat în prima stație, iar după a patra stație a mai rămas în autobuz vreun călător urcat la prima stație?

El. Păuna — G.M. nr. 2/1985

Scanned with OKEN Scanner

55. Într-o pășune sînt mînji, viței și miei. Un elev de la ciclul primar trece pe acolo și-l întreabă pe paznic:

— Sînt 100 de animale?

— Nu, răspunde paznicul. Ca să fie 100 ar mai trebui 1. Ele sînt o parte mînji, de 8 ori mai mulți viței și de două ori mai mulți miei decît mînji și viței la un loc. Socotește tu, zice paznicul, cîți mînji, cîți viței și cîți miei sînt.

Fl. Berechet — G.M. nr. 4/1985

R: 8 mînji; 24 viței; 64 oi

56. Să se determine cel mai mic număr de 4 cifre $N = \overline{abcd}$ care îndeplinește simultan condițiile:

a) numărul format din cifrele b și c micșorat cu numărul format cu aceleași cifre scrise în ordine inversă este egal cu 9;

b) produsul cifrelor numărului N este egal cu 16.

Andreea Malvina I. Maftei — G.M. nr. 4—5/1984

R: $\overline{abcd} = 2\,214$

57. Florin, întrebat de colegii lui ce număr are blocul său, răspunde:

a) este un număr format din 3 cifre;

b) prima cifră este întreitul celei de a treia și de două ori mai mică decît a doua;

c) suma cifrelor este 10.

Care este numărul blocului?

El. Zavaie — G.M. nr. 6/1985

R: 361

58. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Determinați submulțimile lui A, formate din acele numere p, pentru care sînt adevărate propozițiile

a) p se împarte exact la 4;
b) 8 se împarte exact la p;
c) p se împarte exact la 5;
d) p împărțit la 3 dă același rest;

Scanned with OKEN Scanner

e) p este număr cu soț, $p < 5$;
f) p este număr fără soț, $p \leq 5$.

Determinați reuniunea și intersecția submulțimilor găsite la punctele e) și f).

D. Preoteasa — G.M. nr. 12/1982

59. Se caută 5 numere A, B, C, D, E. Care sînt acestea dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

a) A este de două ori mai mare decît B;
b) B este cu 25 mai mare decît C;
c) C este mai mic cu 40 decît D;
d) D este de 3 ori mai mare decît E;
e) suma dintre D și E este 1 000.

Alex. Dumitru — G.M. nr. 2/1984

R: A = 1 470; B = 735; ...

60. Scrieți toate numerele de două cifre care îndeplinesc în același timp condițiile:

a) se împart exact la 7 (fără rest);
b) au suma cifrelor 10.

R: 28; ...

61. Să se determine numărul $A = \overline{xyzt}$ știind că sînt îndeplinite condițiile:

a) suma cifrelor numărului A este 20;
b) fiecare cifră este cu 2 mai mare decît cea anterioară;
(c $x < y < z < t$.

Dina Liana — G.M. nr. 10/1985

62. Notăm prin $\overline{ab}$ de două cifre, iar prin $\overline{abc}$ un număr de 3 cifre.

a) Care numere $\overline{ab}$ verifică egalitatea $\overline{ab} + \overline{ba} = 44$?

b) Care numere $\overline{abc}$ verifică egalitatea $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 555$?

M. Moraru — G.M. nr. 12/1984

R: 13; ...
131; ...

63. Să se afle un număr de telefon știind că îndeplinește condițiile :

a) este format din 5 cifre ;
b) suma lor este 21 ;
c) prima cifră este egală cu ultima ;
d) a doua cifră este egală cu a treia ;
e) adunînd, la îndoitul primei cifre, cifra 1 obținem a patra cifră ;
f) a doua cifră este 4.

Adina Bâra — G.M. nr. 5/1986

64. Să se afle cel mai mic număr natural de 5 cifre care îndeplinește următoarele condiții :

a) nu are cifre care să se repete ;
b) este mai mare decît 20 000 ;
c) are suma cifrelor sale mai mare decît 19.

C. I. Ligor — G.M. nr. 8/1981

65. Să se determine x, y numere naturale consecutive, cele mai mici posibile, pentru fiecare din cazurile :

a) atît x cît și y se descompun în produs de cîte doi factori primi ;
b) atît x cît și y se descompun în produs de cîte trei factori primi ;
c) atît x cît și y se descompun în produs de cîte 4 factori primi.

I. Joldiș — G.M. nr. 2/1980

R : c) 350, 351 ; $350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$; $351 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$

66. Să se găsească 10 numere naturale diferite (în baza 10) de două cifre, știind că toate afirmațiile care urmează sînt adevărate :

a) trei dintre ele au cifra zecilor 1 ;
b) patru dintre ele au cifra zecilor 2 ;
c) două dintre ele au cifra zecilor 3 ;
d) unul dintre ele are cifra zecilor 4 ;

e) patru dintre ele au cifra unităților 5;
f) două au cifra unităților 6;
g) trei au cifra unităților 7;
h) unul are cifra unităților 8.

I.C. Ligor — Concurs de matematică, 5 II 1978

R: 15; 16; 17; 25; 26; 27; ...

67. La un magazin s-au adus jucării de același fel în valoare de 143 lei. Știind că numărul jucăriilor este mai mic decît numărul care reprezintă costul unei jucării, care este un număr natural, să se afle cîte jucării s-au adus și cît costă o jucărie.

V. Mateoc — G.M. nr. 7/1977

68. Maria a rezolvat prima problemă dată de învățător. Ea a explicat problema altor 3 colegi, aceștia, la rîndul lor, au explicat-o fiecare la cîte alți 3 și fiecare din aceștia la cîte alți 3. Toți colegii din clasă știu acum să rezolve problema. Cîți elevi sînt în acel colectiv?

A. Dumitru — G.M. nr. 2/1984

69. Ionel afirmă că la concursul de matematică au participat 225 elevi. Costel știe că numărul fetelor participante este cu 12 mai mare decît al băieților participanți. Să se decidă dacă afirmația lui Ionel este adevărată.

A. Constantin — G.M. nr. 9/1987

70. Un elev a citit vineri, sîmbătă și duminică o carte. Duminică a citit cu 100 pagini mai mult decît vineri și sîmbătă la un loc. El constată că duminică a citit de 4 ori mai mult și încă 10 pagini decît în primele două zile. Cîte pagini a citit în fiecare zi dacă vineri a citit de două ori mai mult decît sîmbătă?

Ilie Gheorghiță — G.M. nr. 12/1984

R: Duminică — 130 pagini, ...

Scanned with OKEN Scanner

71. Patru frați — Mircea, Ionel, Sănducu și Laurențiu — au o sumă de bani. Sănducu are de 5 ori mai puțin decît Ionel, Ionel de două ori mai mult decît Mircea, iar Mircea de 3 ori mai puțin edcît Laurențiu. Să se afle care este suma de bani știind că Ionel are 350 lei.

Andaluzia Petre — G.M. nr. 11/1984

72. Calculați suma numerelor pare de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

1) cifra miilor este 1;

2) cifra zecilor este cu 2 mai mare decît cifra unităților;

3) cifra sutelor reprezintă jumătate din suma cifrelor ce reprezintă unitățile și zecile;

4) suma cifrelor fiecărui număr este mai mare decît 5 și mai mică decît 20.

x x x — G.M. nr. 2/1988

R: 1 342 + 1 564 = 2 906

73. Ionel dorește să-și cumpere o minge de fotbal care costă 300 lei, dar are numai jumătate din prețul ei. Restul banilor îl împrumută în mod egal de la cei 3 prieteni ai săi: Radu, Mihai și Bogdan. Știind că Radu l-a împrumutat cu 1:3 din suma pe care o avea, Mihai cu 2:5 din suma sa, iar Bogdan cu 1:2 din suma lui, să se afle cîți lei are fiecare dintre cei 3 prieteni ai lui Ionel înainte de a-l împrumuta pe acesta.

Maria Stoica — G.M. nr. 11/1981

74. Într-un bloc de locuințe sînt apartamente cu 2, 3 și 4 camere. Știind că sînt 24 apartamente cu 2 și 4 camere, în total 64 camere, iar numărul apartamentelor cu 3 camere reprezintă 3:4 din cel al numărului apartamentelor cu 2 camere, să se afle:

a) cîte apartamente sînt cu 2 camere și cîte cu 4 camere;

b) cîte camere sînt în total în acel bloc.

Ion T. Trică — G.M. nr. 4/1988

Scanned with OKEN Scanner

75. 15 fete și 24 băieți au cules împreună 513 kg fructe de grădină. Un băiat culege cu 10 kg mai mult. Atunci:
Cîte kilograme de fructe a cules un băiat?
Cu cît au cules mai mult băieții decît fetele?

D. Rotocol — G.M. nr. 7/1984

R: Fetele au cules $15 \times 7 = 105$ (kg).
Băieții au cules $24 \times 17 = 408$ (kg).

76. Într-o pungă sînt 7 bile. Costel adaugă un număr de bile, iar Ionel scoate 6 bile. În pungă sînt acum de 4 ori mai multe bile ca la început. Cîte bile a adăugat Costel?

El. Zavate — G.M. nr. 6/1985

77. Radu vrea să știe cîți ani au bunicii lui și de aceea într-o zi întreabă chiar pe bunic. Acesta îi răspunde: "Vei afla numai dacă ești bun la matematică! bunica și cu mine avem împreună $2 \times 2 \times 6 \times 11$ ani, iar bunica ta este cu 12 ani mai tînără decît mine. Știi acum cîți ani avem fiecare?"

A. Macea — G.M. nr. 4/1986

78. Suma a 6 numere este 170. Primul este 60. Care sînt celelalte două numere dacă diferența dintre ele este 8?

A. Dumitru — G.M. nr. 4—5/1984

79. Cei 40 elevi ai clasei a IV-a B din școala noastră au organizat o întrecere de șah, fiecare elev jucînd o singură dată cu fiecare coleg al său. Cîte partide de șah s-au jucat în total?

El. Păuna — G.M. nr. 2/1985

R: $39 + 38 + 37 + \ldots + 3 + 2 + 1 =$
$= \dfrac{(31 + 1) \times 39}{2} = 780$ partide.

80. Trei numere impare consecutive au suma egală cu 237. Să se afle numerele.

A. Popescu — G.M. nr. 7—8/1987

Scanned with OKEN Scanner

81. Pentru numerotarea manualului de matematică de clasa a IV-a s-au folosit 510 cifre. Cîte pagini are manualul?

Camelia Fota — G.M. nr. 11—12/1987

82. Considerați 5 numere naturale consecutive. Arătați că suma lor se împarte exact la 5. Justificați răspunsul în caz general.

x x x — G.M. nr. 2/1988

83. Suma a 8 numere este 1 015. Dacă din fiecare număr se scade același număr se obțin respectiv numerele: 15, 182 și 846. Care sînt cele 8 numere?

A. Trivadar — G.M. nr. 8/1989

84. Un elev are 50 lei în monede de 8 lei, 1 leu și 25 bani. Cîte monede de fiecare fel are elevul dacă în total are de 50 monede?

C. Maiorescu — G.M. nr. 8/1989

85. Într-o clasă sînt 29 elevi. Știind că fetele sînt cu 11 mai multe decît băieții, să se afle cîte fete și cîți băieți sînt în acea clasă.

S. Lupu — G.M. nr. 8/1989

86. Pentru fiecare problemă rezolvată corect, un elev primește 10 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greșit (sau nerezolvată) i se scad 5 puncte. La un concurs s-au dat 10 probleme. Cîte probleme au rezolvat corect fiecare din cei 8 prieteni — Andrei, Barbu și Costel — dacă Andrei a primit 25 puncte, Barbu 40 de puncte și Costel 55 puncte?

Traian Galea — G.M. nr. 7/1989

87. Să se afle cel mai mic număr natural care îndeplinește simultan condițiile: la împărțirea cu 8 dă restul 1; la împărțirea cu 4 dă restul 2; la împărțirea cu 5 dă restul 8; la împărțirea cu 6 dă restul 4.

A. Baltreș — G.M. nr. 6/1989

Scanned with OKEN Scanner

88. O cantitate de căpşuni trebuie pusă în lăzi. Dacă în fiecare ladă se pun cîte 5 kg, rămîn 180 kg. Dacă se pun cîte 6 kg în fiecare ladă, rămîn 20 lăzi goale şi o ladă cu numai 2 kg.

Cîte lăzi şi cîte kilograme de căpşuni sînt?

M. Beştea — G.M. nr. 6/1989

89. La un concurs de matematică s-au susţinut 8 baraje : după primul baraj au fost eliminaţi o treime din participanţi şi 1 elev a renunţat ; după al doilea, au fost eliminaţi o cincime din cei rămaşi şi alţi 4 au renunţat, iar după al treilea baraj au fost eliminaţi o pătrime din cei rămaşi şi încă 8. Ştiind că după cele 3 baraje au rămas 40 elevi, aflaţi cîţi elevi au fost înscrişi iniţial în concurs.

M. Beştea — G.M. nr. 6/1989

90. M-am gîndit la un număr şi am făcut următoarele operaţii : l-am împărţit la 8 iar rezultatului i-am adunat 5, obţinînd un alt număr pe care l-am înmulţit cu 6, iar noului rezultat i-am scăzut 12. Efectuînd aceste operaţii, am obţinut cel mai mic număr natural de trei cifre diferite. La ce număr m-am gîndit?

M. Stănescu — G.M. nr. 6/1989

91. Suma a 8 numere este 418. Să se afle numerele ştiind că primul este de două ori mai mare decît al treilea, iar al doilea cu 2 mai mic decît sfertul primului.

A. Călugăriţă — G.M. nr. 4/1989

92. Cîte cifre are numărul $(10^{641} - 1) : 9$ şi care sînt acestea?

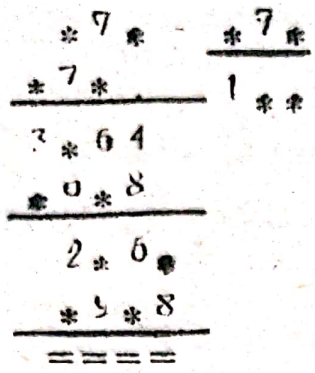
B. Rotar — G.M. nr. 4/1989

93. Găsiţi cel mai mic număr natural mai mare ca 1, care, împărţit pe rînd la numerele 2, 8, 5, 6, 20 dă de fiecare dată restul 1.

x x x — G.M. nr. 8/1989

Scanned with OKEN Scanner

94. Reconstruiți împărțirea:



95. Un ciclist parcurge un traseu în 4 etape. În prima etapă parcurge jumătate din traseu plus 5 km, în a doua etapă jumătate din restul traseului plus 5 km, în a treia etapă jumătate din noul rest al traseului plus 5 km, iar în a patra etapă 5 km.

Cîți kilometri are traseul?

Gh. Vicol — Turcanu

96. Să se afle cel mai mic și cel mai mare număr natural de două cifre care, împărțit la un număr de o singură cifră, dă restul 7.

Paulina Costin — G.M. nr. 11—12/1988

97. Să se determine toate numerele de forma $\overline{abc}$, cu a, b, c cifre distincte, pentru care are loc egalitatea

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 594.$$

Liviu Anton Pîrșan — G.M. nr. 9/1988

98. Reconstituiți înmulțirea $\overline{abc} \times 3 = \overline{bcc}$.

V. Berinde — G.M. nr. 9/1988

99. M-am gîndit la un număr. Dacă am adăugat 100 am aflat un număr format din 8 unități, 2 sute și 8 mii. Care este numărul la care m-am gîndit?

Piroșka Mikloș — G.M. nr. 9/1988

100. Cinci elevi de la Tg. Lăpuș pleacă în excursie la Baia Mare, avînd asupra lor sumele de 90 lei, 120 lei, 115 lei, 140 lei și 100 lei. Ei cheltuiesc în oraș aceeași sumă fiecare. La întoarcere constată că mai au împreună 140 lei. Să se afle cîți lei cheltuiește fiecare elev în oraș și cu cîți lei mai rămîne fiecare elev,

Regina Daemian — G.M. nr. 9/1988

101. Determinați numerele naturale x, y, z știind că $7x + 5y - z = 8$ și $y + z = 11$.

x x x — G.M. nr. 8/1988

R: $x = 1$; $y = 2$; $z = 9$

102. Să se afle un număr de 4 cifre știind că, dacă-i așezăm în față cifra 8, obținem un număr de 3 ori mai mare ca numărul ce s-ar obține din numărul inițial cu cifra 6 așezată la sfîrșit.

St. Smărăndoiu — G.M. nr. 11/1985

R: Condiția $\overline{8abcd} = 3 \cdot \overline{abcd6}$;
$\overline{abcd} = 2\,758$

103. Știind că într-o împărțire deînmulțitul se termină în 197, iar produsul în 832, care sînt ultimele trei cifre ale înmulțirii?

Daniela și Florian Berechet — G.M. nr. 9/1987

104. Să se găsească cifrele x, y mai mari decît zero din înmulțirea:

$$\begin{array}{r} 7xy \cdot \\ 7y \\ \hline 86xy \\ 707y \\ \hline y437y \end{array}$$

Mihaela Soare — G.M. nr. 9/1984

C. PROBLEME DE PERSPICACITATE

1. Puneţi în locul steluţelor cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cîte o singură dată, astfel încît adunarea

$$\begin{array}{r} *** + \\ *** \\ \hline *** \end{array}$$

să fie corectă.

x x x — G.M. nr. 10/1986

Soluţie : 327 + 564 = 891. Găsiţi şi alte soluţii ! Găsiţi soluţia cînd suma este 981 !

2. Să se reconstituie adunarea, steluţele fiind cifre diferite, suma reprezentînd cel mai mare număr posibil cu cifre distincte !

a)
$$\begin{array}{r} *** + \\ * \\ *75 \\ \hline *** \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} ** + \\ * \\ *7 \\ \hline 1* \\ \hline ** \end{array}$$

Domnica Preoteasa — G.M. nr. 7/1984

Soluţie : a) 302 + 4 + 675 = 981

3. Să se reconstituie adunarea

$$\begin{array}{r} 1*5* + \\ 41*7 \\ \hline 6*86 \end{array}$$

unde steluţele reprezintă cifre în baza 10.

R. Cornea — G. M. nr. 9/1980

Scanned with OKEN Scanner

4. Determinați numerele reale care verifică relațiile:

$\frac{1}{2}$ din $\bigcirc = \square$; $\frac{1}{3}$ din $\square = \triangle$; $\frac{1}{4}$ din $\triangle = 1$

x x x — G.M. nr. 11—12/1986

5. La exercițiul de mai jos, folosiți și paranteza, dacă e nevoie, pentru a obține pe rînd rezultatele: 0, 16 și 40:

$$5 \times 4 : 2 + 8 - 2 =$$

Emil Moise — G.M. nr. 4—5/1984

Soluție: $(5 \times 4) : (2 + 8) - 2 = 20 : 10 - 2 = 2 - 2 = 0$

Puneți paranteza pentru celelalte rezultate!

6. Scrieți numărul 100 folosind 8 cifre de 2 și operațiile obișnuite cu numere.

Petre Țelinoiu

7. Puneți parantezele în egalitățile de mai jos ca să fie adevărate:

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 12$ $\quad$ $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 13$
$3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 37$ $\quad$ $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 21$
$3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 28$ $\quad$ $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 25$
$3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 30$ $\quad$ $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 45$

x x x — G.M. nr. 9/1985

Soluție parțială:

$3 \cdot (1 + 2) \cdot 4 + 1 = 37$
$3 \cdot (1 + 2 \cdot 4 + 1) = 30$
$3 \cdot (1 + 2) \cdot (4 + 1) = 45$

Găsiți celelalte soluții!

8. Cum se pot realiza egalitățile de mai jos punînd paranteza și semnele operațiilor aritmetice între cifrele date?

a) 5 5 5 5 = 3
b) 5 5 5 5 = 5
c) 5 5 5 5 = 6

Florian Berechet — G.M. nr. 4/1985

Soluție: a) $(5 + 5 + 5) : 5 = 3$

Găsiți pentru b) și c)!

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se completeze spațiile libere între cifrele de mai jos cu una din operațiile +, —, x, :, astfel încît egalitățile de mai jos să fie adevărate :

a) 1 9 8 4 = 19
b) 1 9 8 4 = 8
c) 1 9 8 4 = 4

Revista „Alpha" — G.M. nr. 6/1985

Soluție : a) 1 + 9 × 8 : 4 = 19

10. Completați pătrățelele de mai jos cu cîte unul din semnele celor patru operații care fac adevărate propozițiile :

a) 50 □ 14 □ 9 = 45
b) 120 □ 35 5 = 31
c) 173 □ 2 □ 146 = 200
d) 2 □ 33 □ 19 = 4

Florica Ghizdaru — G.M. nr. 6/1981

Soluție pentru a) : 50 — 14 + 9 = 45

11. Să se pună în locul steluțelor cifrele astfel încît înmulțirile de mai jos să fie adevărate :

∗∗9 ·	∗∗7 ·	∗∗∗ ·
∗	∗	∗
∗∗∗	∗∗3	446

x x x — G.M. nr. 4/1979

12. Puneți în cele 10 steluțe cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (cifrele nu se repetă) astfel încît înmulțirile următoare să fie în același timp adevărate :

∗∗ ·	∗∗ ·
∗	∗
∗∗	∗∗

x x x — G. M. nr. 11—12/1988

Soluție parțială : 09 · 6 = 54

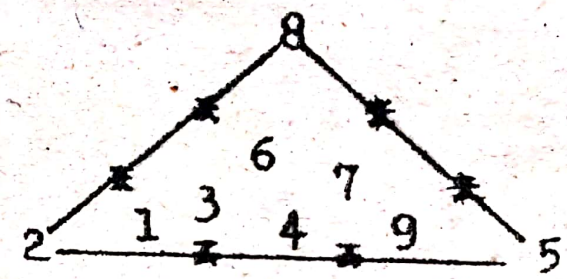
Scanned with OKEN Scanner

13. Puneți cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 în locul steluțelor astfel încît suma cifrelor unite printr-o linie dreaptă să fie 14.

Revista „Alpha" — G.M. nr. 6/1985

14. Numerele din interiorul triunghiului din figură erau plasate inițial în locul steluțelor astfel încît suma lor de pe fiecare latură (segment) era 20. Încercați să le așezați ca în situația inițială.

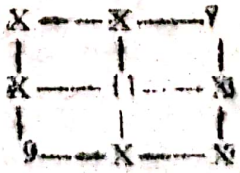
x x x — G.M. nr. 4/1979



15. Puneți cifrele 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 în locul steluțelor din tabloul de mai jos astfel încît suma cifrelor din locul steluțelor unite printr-o linie dreaptă să fie 18.

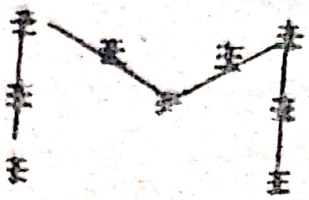
Liviu Istrate — G.M. nr. 7—8/1987

Soluție (parțială): Completați restul steluțelor fără ca cifrele rămase să se repete:



16. Scrieți cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în locul celor nouă steluțe din desen astfel suma cifrelor de pe fiecare din cele patru laturi M să fie 13.

Matematika v școle — G.M. nr. 8/1985



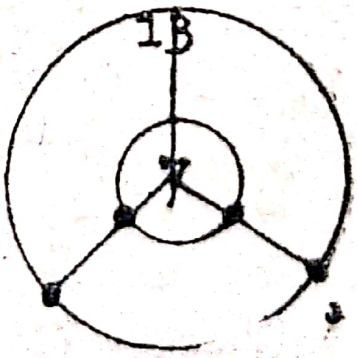
17. Se consideră următoarea figură numită „cerc magic" și numerele 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

a) Să se așeze numerele de mai jos în punctele indicate în figură astfel încît suma numerelor de pe o rază să fie constantă. Există mai multe soluții? Precizăm că fiecare număr este folosit o dată și numai o dată.

2) Aceeași problemă ca la 1), dacă în plus se cere ca suma numerelor de pe fiecare cerc să fie constantă și egală cu suma de pe o rază. Se cere o soluție independentă de rezultatul obținut la punctul 1).

Revista „ALPHA", R.D.G. — G.M. nr. 2/1978

Soluție parțială pentru 2)



18. Să se înlocuiască literele prin cifre !

S A L A T Ă + S F E C L Ă = L E G U M E

Un criptaritm este o problemă în care se dă o operație aritmetică unde cifrele au fost înlocuite prin litere conform unei chei de atribuire și pentru care se cere ca prin studierea relațiilor implicate de operația (sau operațiile) date să se restabilească cheia de atribuire, adică corespondența dintre cifre și litere.

Soluție : Litera S trebuie înlocuită cu o cifră mică pentru că suma este formată dintr-un număr tot cu șase cifre.

183858 + 176488 = 860296

19. Reconstituiți adunarea ZWEI + DREI = FUNF

Revista „Alpha" nr. 8/1987 — G.M. nr. 11—12/1987

20. Reconstituiți adunarea V O L V O + F I A T = = M O T O R

x x x — G.M. nr. 4/1988

21. Înlocuiți literele cu cifre astfel încît adunarea P A T R U + P A T R U = Ş A P T E să fie corectă.

Gh. Vicol-Turcanu — G.M. nr. 5—6/1988

22. Să se înlocuiască literele cu cifre astfel încît să fie adevărată egalitatea P A R + P A R = A H A H A

Kvant nr. 4/1988 — G.M. nr. 10/1988

23. Reconstituiți adunarea S A N D A + D A N A + A N = = D I A N A.

Ion Z. Predescu — G.M. nr.

24. Reconstituiți adunarea E L E + E L + E = 6 E L

Magdalena Predescu — G.M. nr. 6/1989

Cd. 92 coala 18

Scanned with OKEN Scanner

25. Să se reconstituie adunarea M A R I A + N I N A + + I N A = 44444

Ștefan Antonescu — G.M. nr. 1/1989

26. Reconstituiți adunarea A B C + A B + A = 3 0 0.

Revista „Alpha" nr. 2/1987 — G.M. nr. 11—12/1987

Soluție: Scriind sistematic numerele, adunarea se mai scrie astfel: $100A + 10(A + B) + (A + B + C) = 100 \cdot 2 + 10 \cdot 9 + 1 \cdot 10$, de unde $A + B + C = 10$, $A + B = 9$, deci $C = 1$, $A = 2$, $B = 7$.

27. Reconstituiți înmulțirea

$$\begin{array}{r} B\ B\ C \cdot \\ E\ A \\ \hline C\ D\ A \\ A\ C\ E\ E \\ \hline 2\ 7\ 5\ 5\ 2 \end{array}$$

Puiu Dumitru — G.M. nr. 11—12/1988

28. Determinați numerele B, E, R, L, I, N știind că:

$E + R + L = 16$ $\quad N = 4 \cdot L$

$R \cdot L = 18$ $\quad L = 6$ sau 9

$L + I = 8$ sau R $\quad B + E + R + L + I + N = 34$

Revista „Alpha", R.D.G. — G.M. nr. 10/1987

29. Înlocuiți literele distincte cu cifre distincte astfel încît să avem egalitatea:

$EP : S + I + L + O \cdot N = LL$

Revista „Alpha" 1988 — G.M. nr. 8/1988

30. Să se reconstituie adunarea M E R E + P E R E = = D U D E, știind că $2P = R$ și $6M = 8$.

Adriana Truică — G.M. nr. 11/1978

Pătrate magice

31. Completați pătratul cu cifre de la 1 la 9 o singură dată astfel ca suma pe orizontală și pe verticală să fie 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4		
		7
1		

7		
		9
8		

		2
5		
	8	

Pătratul cu 16 numere

Completați pătratele goale cu :

a) numere de la 1 la 4, astfel ca suma magică să fie 10;

b) numere de la 1 la 16, astfel ca suma magică să fie 34;

c) numere de la 6 la 21, astfel ca suma magică să fie 54;

d) numerele 2, 4, 6, 8 astfel ca suma magică să fie 20.

		1	2
		4	
	1		4
	4		

16		3	6
	7	6	

18			
8		11	20
	16	12	

8			6
	6	8	
	2	4	
4			

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul I pag.

Operații aritmetice cu numere naturale . . 9
A. Adunarea numerelor naturale 9
B. Scăderea numerelor naturale 17
C. Înmulțirea numerelor naturale 21
D. Împărțirea numerelor naturale 35
E. Puteri. Pătrate 46
F. Cuburi 55
G. Puteri 59
H. Ultima cifră a unei expresii numerice 66

Capitolul al II-lea

Divizibilitatea numerelor naturale 73
A. Numere pare și impare 73
B. Numere prime 77
C. Criterii de divizibilitate 84
D. Divizibilitatea expresiilor numerice 99
E. Divizibilitatea polinoamelor numerice 103
F. Divizibilitatea exponențialelor numerice . . . 108
G. Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale . . . 117
H. Divizori proprii și improprii 123

Capitolul al III-lea 127

A. Compararea fracției cu întregul. Ordonarea fracțiilor 127
B. Simplificarea fracțiilor 132
C. Operații cu fracții 145

Scanned with OKEN Scanner

D. Rapoarte și proporții. Împărțirea în părți proporționale 154
E. Media aritmetică și media geometrică 159

Capitolul al IV-lea

Fracții zecimale. Transformarea fracțiilor zecimale periodice în fracții ordinare și invers 163

Capitolul al V-lea

Radicali. Rădăcini pătratice, cubice, bipătrate 172

Capitolul al VI-lea

Inegalități. Compararea numerelor raționale. Inegalități numerice 181

Capitolul al VII-lea

Operații în baze diferite 190

Capitolul al VIII-lea

Metode de rezolvare a problemelor 205
A. Probleme care se rezolvă prin metoda figurativă 208
B. Metoda falsei ipoteze 221
C. Metoda mersului invers 226
D. Probleme de mișcare 230
E. Probleme propuse spre rezolvare 239

Capitolul al IX-lea 255

Exerciții și probleme pentru ciclul primar
A. Probleme care se rezolvă prin metoda figurativă 255
B. Exerciții și probleme diverse propuse spre rezolvare 265
C. Probleme de perspicacitate 284

Scanned with OKEN Scanner

În curs de apariție la Editura „Porto-Franco" Galați

Constantin Vremuleț	— CASTELUL DE PAPURĂ (roman)
Ion Grecea	— TALIDA (roman)
Hortensia Teodorescu	— DINCOLO DE SINGURĂTATE (roman)
Mihail Grămescu	— PHREERIA (roman S.F.)
Brian Aldiss	— SERA SAU LUNGA DUPĂ-AMIAZĂ A PĂMÎNTULUI (roman S.F.)
Corneliu Radu Cadelcu	— DETECTIVII DE DUMINICA (roman polițist)
Richard Hammer	— FILIERA VATICANULUI (roman polițist)
Mircea Ionescu	— A PATRA PUNTE (roman polițist)
Vasile Datcu	— SINGURĂTATE ÎN TRANZIT (povestiri)
Octavian Enicelcu	— HARLAȘA ȘI SATUL (povestiri)
Anatolie Panis	— PISICI PENTRU EXPORT (proză scurtă)
Violeta Ionescu	— VULNERABILA UITARE (proză scurtă)
Ionel Bandrabur	— CÎNDVA, DE DEMULT.. (povestiri)

Scanned with OKEN Scanner

Sterian Vicol	**— VINDECARE ÎN PĂCAT (poezii)**
Cezarina Adamescu	**— PRIMĂVARA FACE POZNE (poezii pentru copii)**
Ion Trif Pleșa	**— TRĂSNAIE LA SOVATA (povestiri pentru copii)**
Marian Faighenov	**— TICĂ TEMERARUL ȘI EROII ANTICI (povestiri pentru copii)**
Florin Muscalu	**— CARTEA DE ARGINT (versuri pentru copii)**
Kati Rekai	**— O PLIMBARE PRIN TORONTO CU MICKEY, TAGGY, PUPPO ȘI CICA (povestire istorico-geografică)**
Dimitrie Cuclin	**— METAFIZICA (studiu)**
Nicolae Cucela	**— DIN CULISELE TELEVIZIUNII (memorii)**
Nicolae Rainea	**— DINCOLO DE DREPTUNGHIUL GAZONULUI**
Ion Chivu, Ion Chiloma	**— AVENTURI ÎN LUMEA FOTBALULUI (roman)**
Ion Todericiță	**— TESTE DE ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ**
D. Bătineț, M. Țena, J. Crînganu, C. Ursu	**— CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A IX-A**
Prof. univ. dr. Nichita Vasile și colectivul	**— ECONOMIA POLITICĂ, VOL. I ȘI II.**

Cei interesați în procurarea cărților se vor adresa centrelor de librării din țară.

Scanned with OKEN Scanner